ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Μαθηματική Γλωσσολογία: από τη Θεωρία Κατηγοριών στις Κατηγοριακές Γραμματικές

Διπλωματική Εργασία

του

Νικόλα Νησίδη

Επιβλέπων: Πέτρος Στεφανέας
Λέκτορας Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούλιος 2012

Μαθηματική Γλωσσολογία: από τη Θεωρία Κατηγοριών στις Κατηγοριακές Γραμματικές

Νικόλας Νησίδης

Διπλωματική εργασία

Επιβλέπων
Πέτρος Στεφανέας
Λέκτορας Ε.Μ.Π.

Τριμελής εξεταστική επιτροπή

Πέτρος Στεφανέας	Αριστείδης Αραγεώργης	Γεώργιος Κολέτσος
Λέκτορας Ε.Μ.Π.	Λέκτορας Ε.Μ.Π.	Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Περίληψη

Η μαθηματική γλωσσολογία είναι το πεδίο των μαθηματικών, όπου μελετώνται γλωσσικά φαινόμενα και οι σχέσεις μεταξύ τους ως αντικείμενα μαθηματικών θεωριών. Στην παρούσα εργασία, παρουσιάζονται οι κατηγοριακές γραμματικές ξεκινώντας από τη Θεωρία Κατηγοριών. Αρχικά, αναπτύσσουμε τις βασικές έννοιες της Θεωρίας Κατηγοριών, όπως αυτές της κατηγορίας, του συναρτητή και του φυσικού μετασχηματισμού. Έπειτα, εισερχόμαστε στον κόσμο των κατηγοριακών γραμματικών και, πιο συγκεκριμένα, παρουσιάζουμε τη γραμματική του Αϊντουκιέβιτς, τη γραμματική Αϊντουκιέβιτς-Μπαρ-Χιλλέλ (**AB**), τόσο το προσεταιριστικό όσο και το μη προσεταιριστικό Λογισμό Λάμπεκ (**L** και **NL**) και το Λογισμό Λάμπεκ- Φαν Μπένθεμ (**LP**). Αναφέρουμε επίσης και τη δύναμη των κατηγοριακών γραμματικών εξετάζοντας τη σχέση τους με τις ασυμφραστικές γραμματικές. Στη συνέχεια, διατυπώνονται οι κατηγοριακές γραμματικές στο πλαίσιο της γραμμικής λογικής και οδηγούμαστε στα δίκτυα αποδείξεων. Τέλος, αφιερώνεται ένα κεφάλαιο αποκλειστικά στην εφαρμογή των κατηγοριακών γραμματικών στην ελληνική γλώσσα. Κύριος στόχος της εργασίας είναι η κατάδειξη της ευδοκίμησης των κατηγοριακών γραμματικών στην ελληνική.

λέξεις κλειδιά Θεωρία Κατηγοριών, κατηγοριακές γραμματικές, σύνταξη, γραμματική Αϊντουκιέβιτς, γραμματική AB, Λογισμός Λάμπεκ, Λογισμός Λάμπεκ-Φαν Μπένθεμ, ασυμφραστικές γραμματικές, γραμμική λογική, μη αντιμεταθετική διαισθητική πολλαπλασιαστική γραμμική λογική, δίκτυα αποδείξεων, ελληνική γλώσσα

Abstract

Mathematical linguistics is the field of mathematics where linguistic phenomena and the relations among them are studied as objects of mathematical theories. In this thesis, categorial grammars are introduced beginning from Category Theory. Firstly, we develop the basic concepts of Category Theory such as those of category, functor and natural transformation. Afterwards, we enter the world of categorial grammars and, particularly, we present Ajdukiewicz' grammar, Ajdukiewicz-Bar-Hillel grammar (**AB**), both associative and non-associative Lambek Calculus (**L** and **NL**) and Lambek-Van Benthem Calculus (**LP**). We also mention the power of categorial grammars by studying their relation with context-free grammars. Then, categorial grammars are formulated within the framework of linear logic and we are leaded to proof nets. Finally, a whole chapter is exclusively dedicated to applying categorial grammars to the greek language. The main goal of this thesis is showing that categorial grammars thrive in the greek language.

keywords Category Theory, categorial grammars, syntax, Ajdukiewicz grammar, **AB** grammar, Lambek Calculus, Lambek-Van Benthem Calculus, context-free grammars, linear logic, non-commutative intuitionistic multiplicative linear logic, proof nets, greek language

Πρόλογος

Η παρούσα διπλωματική εργασία φιλοδοξεί να αναγνωσθεί ως μία μικρή εισαγωγή στη μαθηματική γλωσσολογία. Η μαθηματική γλωσσολογία υπάγεται στην υπολογιστική γλωσσολογία, η οποία εντάσσεται στην εφαρμοσμένη γλωσσολογία. Η **υπολογιστική γλωσσολογία** μπορεί να θεωρηθεί ως συνώνυμο της αυτόματης επεξεργασίας φυσικών γλωσσών,[1] αφού κύριος σκοπός της είναι η κατασκευή υπολογιστικών προγραμμάτων για την επεξεργασία λέξεων και κειμένων φυσικών γλωσσών.

Η **μαθηματική γλωσσολογία** συγκαταλέγεται στην υπολογιστική, αλλά διαφοροποιείται σημαντικά από αυτήν. Αποτελεί την τομή της γλωσσολογίας και των μαθηματικών, δηλαδή είναι το πεδίο των μαθηματικών όπου εξετάζονται γλωσσικά φαινόμενα και οι σχέσεις μεταξύ τους ως αντικείμενα των μαθηματικών θεωριών [26]. Επομένως, η μαθηματική γλωσσολογία αφορά κατά μείζονα λόγο τα εφαρμοσμένα μαθηματικά και δευτερευόντως τη γλωσσολογία. Στο σχήμα 1, αποτυπώνεται ένα πανόραμα της γλωσσολογίας προς διασάφηση των προηγουμένων.

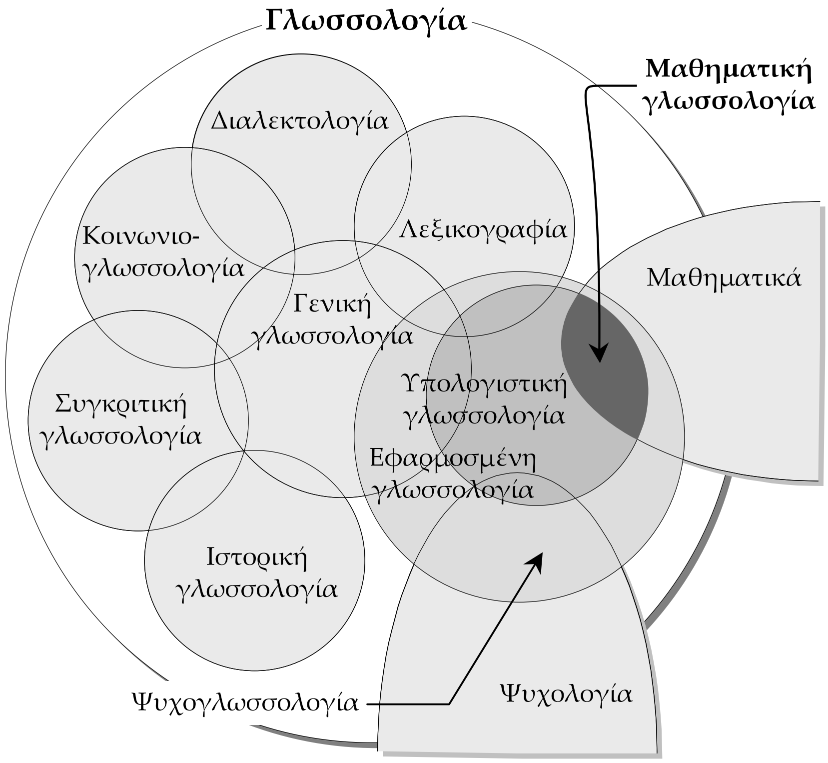
Στη μαθηματική γλωσσολογία, όπως σε όλο το φάσμα των εφαρμοσμένων μαθηματικών, το πρόβλημα της μαθηματικής διατύπωσης και συστηματοποίησης θεωριών, οι οποίες έχουν διατυπωθεί είτε ανεπίσημα είτε ημιεπίσημα, ανακύπτει αρκετά συχνά. Ένα από τα πρώτα παραδείγματα είναι η μελέτη της δομής των προτάσεων, όπου ο Τσόμσκι [31] επιχείρησε να αντικαταστήσει το ανεπίσημο σύστημα της ανάλυσης σε άμεσα συστατικά με τις ασυμφραστικές γραμματικές. Η ποιότητα της μαθηματικής διατύπωσης εξαρτάται τόσο από την πιστότητα στις αρχικές ιδέες όσο και από τη μαθηματική κομψότητα του συστήματος που δημιουργείται. Εδώ, επιχειρείται η συντακτική ανάλυση προτάσεων φυσικών γλωσσών από μαθηματική σκοπιά.

Στην εργασία αυτή, σημείο εκκίνησης είναι η **Θεωρία Κατηγοριών**, η οποία προσφέρει αυτά τα μαθηματικά αντικείμενα που αποζητούμε, έτσι ώστε να περιγράψουμε τα γλωσσικά φαινόμενα. Στο πρώτο κεφάλαιο, παρουσιάζονται οι βασικές έννοιες της Θεωρίας Κατηγοριών, όπως αυτές της κατηγορίας, του συναρτητή και του φυσικού μετασχηματισμού, και διάφορες καθολικές κατασκευές. Αν και οι έννοιες γύρω από τις οποίες περιστρέφονται τα άλλα τρία κεφάλαια αφορούν κατά βάση την κατηγορία και το συναρτητή, παρουσιάζουμε μια γενική εικόνα[2] της Θεωρίας Κατηγοριών με στόχο τη συμπαγή θεμελίωση των επομένων.

Στο δεύτερο κεφάλαιο, έχοντας αναπτύξει τη Θεωρία Κατηγοριών, προχωρούμε στις **κατηγοριακές γραμματικές**. Από τη γένεσή τους, τουλάχιστον εννοιολογικά, χρησιμοποιούνταν οι όροι κατηγορία και συναρτητής για την περιγραφή τους. Ο Λάμπεκ κατάφερε να γεφυρώσει το μαθηματικό χάσμα εισάγοντας παράλληλα και έναν αυστηρό φορμαλισμό της μαθηματικής λογικής. Εδώ, παρουσιάζουμε τις κύριες κατηγοριακές γραμματι-

[1]Είθισται η χρήση του όρου *φυσική γλώσσα* στην Επιστήμη των Υπολογιστών, όταν αναφερόμαστε σε κάποια από τις ομιλούμενες γλώσσες, καθώς υπάρχει ανάγκη διάκρισής του από τον όρο *προγραμματιστική γλώσσα*.

[2]Και πάλι, δεδομένης της βιβλιογραφίας, αρκετά περιορισμένη.



Σχήμα 1: Η θέση της μαθηματικής γλωσσολογίας στο πανόραμα της γλωσσολογίας

κές: τις κλασικές γραμματικές, τους Λογισμούς Λάμπεκ και τους Λογισμούς Λάμπεκ-Φαν Μπένθεμ και δείχνουμε αυτήν τη μετάβαση. Πρέπει να σημειωθεί ότι ο Φαν Μπένθεμ είναι αυτός που εμφυσά δυναμικά τη σημασιολογία στις κατηγοριακές γραμματικές.

Στο τρίτο κεφάλαιο, επιχειρείται η κατάδειξη του ρόλου της **γραμμικής λογικής** στις κατηγοριακές γραμματικές. Μολονότι μετά την περιγραφή του βασικού πλέγματος των κατηγοριακών γραμματικών οι δρόμοι που μπορούμε να ακολουθήσουμε είναι πάρα πολλοί, επιλέξαμε αυτόν, επειδή μας προσφέρει τα **δίκτυα αποδείξεων**. Τα δίκτυα αποδείξεων αναπαριστούν την αποδεικτική διαδικασία μοναδικά, αφού συμπεριλαμβάνουν όλες τις δυνατές αποδείξεις μιας πρότασης σε ένα γράφημα. Επομένως, η συντακτική ανάλυση γίνεται επιτυχέστερα, γρηγορότερα και είναι μοναδική.

Στο τέταρτο κεφάλαιο, πραγματοποιείται μία απόπειρα εφαρμογής των κατηγοριακών γραμματικών και, ειδικότερα, της κατηγοριακής λογικής στην **ελληνική γλώσσα**. Σκοπός του κεφαλαίου αυτού είναι η κατάδειξη της ευδοκίμησης των προηγουμένων στη γλώσσα αυτή, κάτι το οποίο δεν υπάρχει στη βιβλιογραφία. Τα δίκτυα απόδειξης αποτελούν σημαντικό αρωγό στο έργο αυτό.

Καθ'όλη την εργασία, υπήρχε η ανησυχία αν όλος αυτός ο μαθηματικός φορμαλισμός έχει να προσφέρει στη μελέτη των φυσικών γλωσσών, αφού αυτό είναι το ζητούμενο. Επίσης, ισόβαρη ήταν και η ανησυχία κατά πόσο όλα αυτά μπορούν να αξιοποιηθούν υπολογιστικά, έτσι ώστε να μας δώσουν ορθούς τρόπους συντακτικής ανάλυσης χωρίς τη συνεχή μεσολάβηση του ανθρώπου. Ακόμα κι αν οι τελικές απαντήσεις σε αυτά τα ερωτήματα κρίνονται αβέβαιες, αξίζει να ρωτήσουμε, όχι μόνο λόγω, αλλά και έργω, διότι, αλλιώς, πώς θα μάθουμε;

Ευχαριστίες

Η προκείμενη εργασία δε θα μπορούσε να πραγματοποιηθεί χωρίς την καθοδήγηση του επιβλέποντα κυρίου Πέτρου Στεφανέα, Λέκτορα ΕΜΠ, τον οποίο θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά, καθώς ήταν αυτός που με εισήγαγε στο θαυμαστό κόσμο της Θεωρίας Κατηγοριών και των κατηγοριακών γραμματικών. Επίσης, οφείλω να ευχαριστήσω τον Αναπληρωτή Καθηγητή κύριο Γεώργιο Κολέτσο και τον κύριο Αριστείδη Αραγεώργη, Λέκτορα ΕΜΠ, οι οποίοι δέχτηκαν να αξιολογήσουν το εν λόγω πόνημα και έλαβαν μέρος στην τριμελή επιτροπή.

Η εργασία αυτή αποτελεί το επιστέγασμα των σπουδών μου στη ΣΕΜΦΕ γι'αυτό και θα ήθελα να ευχαριστήσω δύο ανθρώπους που με βοήθησαν σε κρίσιμες φάσεις αυτής της πολυετούς προσπάθειας: την Τόνια για την αισιοδοξία της και για το κουράγιο που μου έδωσε σε πάρα πολλές δύσκολες στιγμές και το Μανιά για την ειλικρινή φιλία του και για το ότι έκανε τα μαθήματα να μοιάζουν πιο εύκολα.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους εκείνους που με βοήθησαν να φτάσω εδώ, συμφοιτητές και μη, καθώς και τους γονείς μου, οι οποίοι με θυσίες μού έδωσαν τη δυνατότητα να σπουδάσω αυτό το αντικείμενο.

Περιεχόμενα

Κατάλογος σχημάτων

Κατάλογος πινάκων

Κεφάλαιο 1

Στοιχεία Θεωρίας Κατηγοριών

Η **Θεωρία Κατηγοριών** είναι μια καθολική μαθηματική γλώσσα, όπως η Συνολοθεωρία. Η ειδοποιός διαφορά μεταξύ των δύο είναι ότι ενώ η Θεωρία Συνόλων περιστρέφεται γύρω από την έννοια του συνόλου, η κεντρική έννοια της Θεωρίας Κατηγοριών είναι η συνάρτηση. Να σημειωθεί πως η λέξη συνάρτηση χρησιμοποιείται προσεγγιστικά και όχι με την αυστηρή έννοια που έχει στη Συνολοθεωρία, δηλαδή μια απεικόνιση μεταξύ συνόλων.

Η έννοια της συνάρτησης είναι μία από τις θεμελιωδέστερες έννοιες στα μαθηματικά και στην επιστήμη. Ως μια πρώτη προσέγγιση, θα μπορούσε κανείς να πει πως η Θεωρία Κατηγοριών είναι η άλγεβρα των συναρτήσεων. Με τον ίδιο τρόπο που η θεωρία ομάδων αποτελεί μια αφαίρεση της ιδέας ενός συστήματος μεταθέσεων ενός συνόλου ή συμμετριών ενός γεωμετρικού αντικειμένου, έτσι και η θεωρία κατηγοριών ανακύπτει από την ιδέα ενός συστήματος συναρτήσεων μεταξύ αντικειμένων.

Οι κατηγορίες προέκυψαν, αρχικά, στα μαθηματικά από την ανάγκη ενός φορμαλισμού ικανού να περιγράψει τη μετάβαση από μία μαθηματική δομή ενός τύπου σε μία άλλη κάποιου άλλου. Οπότε, μια κατηγορία αντιπροσωπεύει ένα είδος μαθηματικών και μπορεί να θεωρηθεί ως ένα πεδίο μαθηματικής μελέτης. Η κατηγορία είναι επίσης μια μαθηματική δομή αυτή καθ'εαυτήν. Τέλος, η κατηγορία μπορεί να ιδωθεί ως μια κατασκευή που τυποποιεί τη μαθηματική περιγραφή μιας δομής. Αυτός είναι ο ρόλος της κατηγορίας ως θεωρίας.

Η Θεωρία Κατηγοριών ξεκινά με την παρατήρηση πως πολλές ιδιότητες μαθηματικών συστημάτων μπορούν να ενοποιηθούν και να απλοποιηθούν παρουσιαζόμενες με τη βοήθεια διαγραμμάτων βελών.

Σημείωση Η βιβλιογραφία στη Θεωρία Κατηγοριών είναι πραγματικά πολύ μεγάλη. Σε αυτήν την εργασία, συμβουλευτήκαμε κυρίως το κλασικό [53], καθώς και τα [70][18][87].

1.1 Τι είναι η κατηγορία

Ορισμός 1.1.1. Μια **κατηγορία** $\mathcal{C}$ αποτελείται από:

- **Αντικείμενα** $A, B, C, ..., X, Y, ...$
- **Βέλη** ή **μορφισμούς** $f, g, h, ..., \alpha, \beta, \gamma, ...$

Η συλλογή των αντικειμένων συμβολίζεται ως obj $\mathcal{C}$, ενώ αυτή των βελών ως arr $\mathcal{C}$.

Επιπλέον, κάθε μορφισμός διαθέτει μία **αρχή** (πεδίο ορισμού) και ένα **τέλος** (συμπεδίο ορισμού) εντός της obj $\mathcal{C}$. Όταν η αρχή της f είναι το A, δηλαδή $dom(f) = A$, και το τέλος της το B, δηλαδή $cod(f) = B$, γράφουμε $f : A \to B$. Μπορούμε επίσης να γράψουμε

$$A \xrightarrow{f} B.$$

Η συλλογή όλων των βελών με πεδίο ορισμού το A και συμπεδίο ορισμού το B συμβολίζεται ως $\mathcal{C}(A, B)$ ή ως $hom_{\mathcal{C}}(A, B)$.

Για κάθε ζεύγος μορφισμών

$$A \xrightarrow{f} B \text{ και } B \xrightarrow{g} C$$

υπάρχει μία καθορισμένη **σύνθεση μορφισμών**

$$g \circ f : A \to C$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

Κάθε αντικείμενο A έχει έναν **ταυτοτικό μορφισμό** $1_A : A \to A$.

Τα παραπάνω προϋποτίθενται για την ικανοποίηση των ακόλουθων νόμων:

- Ταυτότητες: Αν $A \xrightarrow{f} B$ τότε

$$1_B \circ f = f \text{ και } f \circ 1_A = f$$

- Προσεταιριστικότητα: Αν $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$ τότε

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f : A \to D.$$

Σχηματοποιώντας την παραπάνω σχέση, λαμβάνουμε

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] \arrow[rrr, bend right=40, "h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left, "h\circ g"] & C \arrow[r, "h"] & D \end{tikzcd}$$

Παρατήρηση Οφείλουμε να έχουμε πάντα υπόψη ότι η έννοια της άλγεβρας συναρτήσεων εισάγεται για δική μας διευκόλυνση και δεν αποτελεί επίσημο ορισμό της κατηγορίας. Η έννοια της κατηγορίας ορίζεται, όπως είδαμε, **αξιωματικά**. Τα αντικείμενα της κατηγορίας δεν είναι απαραιτήτως σύνολα και οι μορφισμοί δεν είναι απαραιτήτως συναρτήσεις, όπως τις ξέρουμε. Ως συνήθως, οι αξιωματικοί ορισμοί μάς προσφέρουν μεγάλη ευελιξία στην κατασκευή των κατηγοριών. Αυτή η ευελιξία είναι κρίσιμη στην εφαρμογή των τελευταίων.

Ένα σημαντικό εργαλείο για την εξοικείωση με τη Θεωρία Κατηγοριών είναι τα διαγράμματα. Τα διαγράμματα αξιοποιούνται στην κατάδειξη και απόδειξη ιδιοτήτων των κατηγορικών κατασκευών.

Ορισμός 1.1.2. Ένα **διάγραμμα** μιας κατηγορίας $\mathcal{C}$ είναι μια συλλογή κορυφών και ακμών, στις οποίες αντιστοιχούν **με συνέπεια** αντικείμενα και βέλη της $\mathcal{C}$. Η συνέπεια έγκειται στο ότι εάν σε μία ακμή έχει αποδοθεί το βέλος f, με πεδίο ορισμού το A και συμπεδίο το B, τότε, υποχρεωτικά, οι κορυφές τις οποίες το βέλος ενώνει πρέπει να έχουν ονομαστεί A και B.

Ορισμός 1.1.3. Ένα διάγραμμα μιας κατηγορίας $\mathcal{C}$ είναι **αντιμεταθετικό** αν για κάθε ζεύγος κορυφών K και L, όλα τα μονοπάτια του διαγράμματος από το K στο L είναι ίσα, δηλαδή αν κάθε μονοπάτι του διαγράμματος ορίζει ένα βέλος και αυτά τα βέλη είναι ίσα στην $\mathcal{C}$. Συνεπώς, η έκφραση «το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & N \arrow[d, "g"] \\
M \arrow[r, "f"'] & L
\end{tikzcd}$$

είναι αντιμεταθετικό» και η έκφραση $f \circ g' = g \circ f'$ θεωρούνται ισοδύναμες.

Στο νόμο της προσεταιριστικότητας, όπως τον δείξαμε προηγουμένως, το διάγραμμα είναι αντιμεταθετικό και τα αντίστοιχα βέλη είναι ίσα μεταξύ τους.

Σημείωση Ο ορισμός του διαγράμματος, όπως τον διατυπώσαμε, δεν είναι αυστηρός. Αρκούμαστε, όμως, στην εξήγηση της αντιμεταθετικότητας ενός διαγράμματος, η οποία εν πολλοίς παίζει τον ρόλο των εξισώσεων στη Θεωρία Κατηγοριών.

Μερικά στοιχειώδη παραδείγματα κατηγοριών

- Η κατηγορία **0** είναι η κενή κατηγορία. Δεν έχει ούτε αντικείμενα, ούτε βέλη.
- Η κατηγορία **1** είναι η κατηγορία $\circlearrowleft$ με ένα αντικείμενο και ένα βέλος.
- Η κατηγορία **2** είναι η κατηγορία $\circlearrowleft \!\rightarrow\! \circlearrowleft$ με δύο αντικείμενα A, B και μόνο ένα βέλος, $A \to B$, όχι της ταυτότητας.
- Η κατηγορία **3** είναι η κατηγορία με τρία αντικείμενα και δύο βέλη, διαφορετικά από αυτά των ταυτοτήτων.

$$\begin{tikzcd}
& \circlearrowleft \arrow[dl] & \\
\circlearrowleft \arrow[rr] & & \circlearrowleft \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

Συνήθη παραδείγματα κατηγοριών

1. Η κατηγορία **Set**. Τα σύνολα είναι τα αντικείμενά της και οι συναρτήσεις μεταξύ αυτών τα βέλη της. Η ταυτοτική συνάρτηση αντιστοιχεί στον ταυτοτικό μορφισμό και η σύνθεση συναρτήσεων στη σύνθεση μορφισμών.
2. Η κατηγορία **Grp**. Αντικείμενά της είναι οι ομάδες και βέλη της οι μορφισμοί μεταξύ των ομάδων αυτών. Ομοίως με τη **Set**, ο ταυτοτικός μορφισμός μιας ομάδας αντιστοιχεί στον ταυτοτικό μορφισμό ενός αντικειμένου, ενώ η σύνθεση μορφισμών μεταξύ ομάδων στη σύνθεση βελών.
3. Η κατηγορία **Rel**. Έχει τα ίδια αντικείμενα με τη **Set**, αλλά εδώ κάθε βέλος $R : A \to B$ είναι μία διμελής σχέση $R \subseteq A \times B$. Δοθέντων δύο βελών $R : A \to B$ και $S : B \to C$, η σύνθεσή τους αποτελεί το **σχεσιακό γινόμενο**

   $$R \circ S : A \to C = \{(a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B \text{ ώστε } (a, b) \in R \text{ και } (b, c) \in S\}.$$

   Τα ταυτοτικά βέλη $id_A : A \to A$ δίνονται από τις διαγώνιες σχέσεις $\{(a, a) \mid a \in A\}$.

4. Η κατηγορία **Mon**. Αποτελείται από μόνο ένα αντικειμένο, το μονοειδές. Τα βέλη της κατηγορίας αυτής είναι τα στοιχεία του μονοειδούς, το ταυτοτικό βέλος είναι το μοναδιαίο στοιχείο u, ενώ η σύνθεση βελών είναι η διμελής πράξη $m \cdot n$ του μονοειδούς.

   Ένα **μονοειδές**, γνωστό και ως ημιομάδα με μοναδιαίο στοιχείο, είναι ένα σύνολο M εφοδιασμένο με μια διμελή πράξη $\cdot : M \times M \to M$ και ένα μοναδικό στοιχείο $u \in M$ τέτοιο ώστε $\forall x, y, z \in M$

   $$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \text{ και } u \cdot x = x \cdot u = x$$

5. Η κατηγορία του **ομαδοειδούς**. Αποτελείται από μια συλλογή αντικειμένων και βασική ιδιότητά του είναι πως κάθε βέλος του είναι ισομορφισμός, δηλαδή αντιστρέψιμο, όπως θα δούμε παρακάτω.

6. Η κατηγορία **Poset**, των μερικώς διατεταγμένων συνόλων[1] και των μονότονων συναρτήσεων μεταξύ τους.

   Μία **μερική διάταξη** είναι μια διμελής σχέση σε ένα σύνολο X, η οποία είναι

   i. **αυτοπαθής** ($x \leq x$, $\forall x \in X$)
   ii. **αντισυμμετρική** (αν $x \leq y$ και $y \leq x$, τότε $x = y$, $\forall x, y \in X$)
   iii. **μεταβατική** (αν $x \leq y$ και $y \leq z$, τότε $x \leq z$, $\forall x, y, z \in X$).

   Έστω το ζεύγος $\langle P, \sqsubseteq \rangle$, όπου P σύνολο και $(\sqsubseteq) \subseteq P \times P$ μια μερική διάταξη. Τότε μια **μονότονη** συνάρτηση f από το $\langle P, \sqsubseteq \rangle$ στο $\langle Q, \leqslant \rangle$ είναι μια συνάρτηση $f \in Q^P$ τέτοια ώστε αν $a \sqsubseteq b$, τότε $f(a) \leqslant f(b)$, $\forall a, b \in P$.

7. Η κατηγορία Ω-**Alg**. Αντικείμενά της είναι οι Ω-άλγεβρες και βέλη της οι μορφισμοί μεταξύ τους.

   Έστω Ω ένα σύνολο τελεστικών συμβόλων, εφοδιασμένο με μια απεικόνιση $a \in \mathbb{N}^{\Omega}$, τέτοια ώστε για κάθε $\omega \in \Omega$, η $a(\omega)$ να είναι η **τάξη**[2] του ω. Το $\Omega_n = \{s \in \Omega : a(s) = n\}$ καλείται σύνολο των ν-τάξιων τελεστικών συμβόλων του Ω. Μία **Ω-άλγεβρα** είναι ένα ζεύγος $\langle A, \delta \rangle$, όπου A είναι ένα σύνολο που καλείται φορέας της άλγεβρας και δ μια οικογένεια πράξεων στο A, τέτοια ώστε

   $$\delta = \bigcup_{s \in \Omega} (\delta_s) \text{ και } \delta_s \in A^{A^{(n)}} \text{ για κάθε } s \in \Omega_n \text{ και για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

   Για κάθε $s \in \Omega$, το δ_s καλείται **ερμηνεία** του s.

   Ένας μορφισμός μεταξύ μιας Ω-άλγεβρας $\langle A, \delta \rangle$ και μιας άλλης $\langle B, \varepsilon \rangle$ είναι μια απεικόνιση $f \in B^A$ ώστε

   $$f(\delta_s(a_1, ..., a_n)) = \varepsilon_s(f(a_1), ..., f(a_n)) \text{ για κάθε } \langle a_1, ..., a_n \rangle \in A^{(n)}, s \in \Omega_n, n \in \mathbb{N}.$$

Ας δούμε τώρα, μια εξαιρετικά χρήσιμη θεώρηση μιας κατηγορίας, η οποία άπτεται της μαθηματικής λογικής. Πρόκειται για την κατηγοριακή λογική κατά Λάμπεκ, της οποίας την περιγραφή λαμβάνουμε από το Στεφανέα [3]. Οι λογικές παραγωγές της είναι της μορφής

$$A_1 A_2 ... A_n \to A_{n+1}$$

όπου οι φόρμουλες $A_1, ..., A_n$ είναι οι υποθέσεις που παράγουν λογικά το A_{n+1}. Αρχικά, ορίζουμε το πολυγράφημα.

[1] Η λέξη Poset προέρχεται από τη συνένωση των λέξεων **P**artially **o**rdered **set**.
[2] Αποδίδουμε με τον όρο τάξη την αγγλική λέξη *arity*.

Ορισμός 1.1.4. Ένα **πολυγράφημα** αποτελείται από

- μία κλάση βελών A καλούμενα **λογικές παραγωγές**
- μία κλάση αντικειμένων O καλούμενα **φόρμουλες**

και δύο απεικονίσεις

(i) $\theta_0 : A \to O^*$ (αρχή)

(ii) $\theta_1 : A \to O$ (τέλος).

Το O^* αποτελείται από λίστες της μορφής $A_{i_1}A_{i_2}...A_{i_k}$, όπου $A_{i_1}, A_{i_2}, ..., A_{i_k} \in O$. Οπότε, για κάθε βέλος του πολυγραφήματος

$$f : A_1A_2...A_n \to A_{n+1}$$

έχουμε ότι

$$\theta_0(f) = A_1A_2...A_n \text{ και } \theta_1(f) = A_{n+1}$$

Τώρα, μπορούμε να ορίσουμε το σύστημα λογικής παραγωγής κατά Λάμπεκ.

Ορισμός 1.1.5. Ένα **σύστημα λογικής παραγωγής κατά Λάμπεκ** είναι ένα πολυγράφημα, το οποίο ικανοποιεί τα εξής:

- Για κάθε αντικείμενο A υπάρχει ένας ταυτοτικός μορφισμός $1_A : A \to A$.
- Για κάθε δύο μορφισμούς $f : \Theta \to A$ και $g : \Gamma A \Delta \to B$ υπάρχει ένας μορφισμός $g\langle f\rangle : \Gamma\Theta\Delta \to B$ τέτοιος ώστε

$$\frac{f : \Theta \to A \qquad g : \Gamma A \Delta \to B}{g\langle f\rangle : \Gamma\Theta\Delta \to B}$$

  δηλαδή ισχύει η τομή κατά Γκέντζεν.[3]

Ορισμός 1.1.6. Έστω μια κατηγορία $\mathcal{C}$. Η κατηγορία $\mathcal{B}$ καλείται **υποκατηγορία** της $\mathcal{C}$ αν ισχύουν τα ακόλουθα

(i) Κάθε αντικείμενο της $\mathcal{B}$ ανήκει στη $\mathcal{C}$.

(ii) Για κάθε αντικείμενο B και B′ της $\mathcal{B}$ $hom_{\mathcal{B}}(B, B') \subset hom_{\mathcal{C}}(B, B')$.

(iii) Οι συνθέσεις και τα ταυτοτικά βέλη είναι ίδια στην $\mathcal{B}$ και στη $\mathcal{C}$.

Ορισμός 1.1.7. Για κάθε κατηγορία $\mathcal{C}$, υπάρχει η **δυϊκή** αυτής και συμβολίζεται ως C^{op}. Τα αντικείμενα της τελευταίας είναι τα ίδια με της πρώτης, ενώ τα βέλη της C^{op} είναι τα αντίθετα αυτών της $\mathcal{C}$. Δηλαδή, εάν το $f : A \to B$ είναι ένα βέλος της $\mathcal{C}$, τότε το $g : B \to A$ είναι ένα βέλος της C^{op}.

Πρόταση 1.1.8. *Η δυϊκή μιας κατηγορίας είναι και αυτή κατηγορία.*

Απόδειξη. Από τον ορισμό, προκύπτει άμεσα. □

Πρόταση 1.1.9. *Για κάθε κατηγορία $\mathcal{C}$ ισχύει $(\mathcal{C}^{op})^{op} = \mathcal{C}$.*

[3]Στο επόμενο κεφάλαιο, θα επεκταθούμε σχετικά με το συγκεκριμένο λογικό κανόνα.

Απόδειξη. Πάλι από τον ορισμό, τα αντικείμενα της $(\mathcal{C}^{op})^{op}$ είναι ίδια με αυτά της $\mathcal{C}$, ενώ τα αντεστραμμένα βέλη των αντεστραμμένων βελών της $\mathcal{C}^{op}$, δηλαδή τα βέλη της $(\mathcal{C}^{op})^{op}$, έχουν την ίδια φορά με αυτά της $\mathcal{C}$. □

Αρχή δυϊκότητας Κάθε κατηγορική έννοια έχει και τη δυϊκή της. Έτσι, όπως έχουμε πεδίο ορισμού και συμπεδίο ορισμού, προκύπτουν τα αρχικά και τελικά αντικείμενα, οι εξισωτές και οι συνεξισωτές, τα γινόμενα και τα συγγινόμενα, τα όρια και τα συνόρια, έννοιες τις οποίες θα δούμε αναλυτικά παρακάτω. Κάθε πρόταση που αφορά μια έννοια στην $\mathcal{C}$, η ίδια ισχύει και για την αντίστοιχη δυϊκή πρόταση της C^{op}. Συνεπώς, όποτε ορίζουμε κάποια έννοια, τις περισσότερες φορές θα ακολουθεί και η δυϊκή αυτής. Επίσης, αν Σ είναι μια πρόταση της $\mathcal{C}$ και Σ^* μια πρόταση της C^{op}, τότε $\Sigma^{**} = \Sigma$ και, αν μια πρόταση εμπεριέχει ένα διάγραμμα, τότε η δυϊκή αυτής εμπεριέχει το ίδιο διάγραμμα με τα βέλη αντεστραμμένα. Τα παραπάνω μπορούν να συνοψισθούν στο ακόλουθο:

$$\frac{f : A \to B \text{ στη } \mathcal{C}}{g : B \to A \text{ στη } \mathcal{C}^{op}}$$

Είδαμε, λοιπόν, τι είναι η κατηγορία και μερικά παραδείγματα κατηγοριών, διάφορες άλλες βασικές έννοιες, καθώς και την πολύ σημαντική για την παρούσα εργασία άποψη ότι μια τυχαία κατηγορία μπορεί να αντιμετωπιστεί ως ένα τυπικό σύστημα συμπερασμού. Ας προχωρήσουμε τώρα στον ορισμό της δεύτερης σημαντικότερης έννοιας της Θεωρίας Κατηγοριών: την έννοια του συναρτητή.

1.2 Τι είναι ο συναρτητής

Ελαφρώς απομακρυνόμενοι από το τοπίο των κατηγοριών, παρατηρούμε ότι αυτές ξεκινούν να δημιουργούν μια δομή, η οποία διαφαίνεται από τις απεικονίσεις μεταξύ τους. Αυτές τις απεικονίσεις τις αποκαλούμε συναρτητές.

Ορισμός 1.2.1. Ένας **συναρτητής**

$$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$$

μεταξύ δύο κατηγοριών $\mathcal{C}$ και $\mathcal{D}$ είναι μία απεικόνιση αντικειμένων σε αντικείμενα και βελών σε βέλη, έτσι ώστε

- $F(f : A \to B) = F(f) : F(A) \to F(B)$
- $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$
- $F(1_A) = 1_{F(A)}$

Με τον ίδιο τρόπο που ορίσαμε τη σύνθεση βελών, αναλόγως ορίζουμε και τη σύνθεση συναρτητών.

Ορισμός 1.2.2. Έστω $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ και $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ συναρτητές. Τότε η **σύνθεση** των δύο αυτών συναρτητών

$$(G \circ F) : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$$

είναι επίσης συναρτητής.

Ορισμός 1.2.3. Για κάθε κατηγορία $\mathcal{C}$, ο **ταυτοτικός συναρτητής** $I_\mathcal{C}$ απεικονίζει κάθε αντικείμενο και κάθε βέλος της $\mathcal{C}$ στον εαυτό του.

Ορισμός 1.2.4. Ένας συναρτητής $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ λέγεται **ενδοσυναρτητής** στη $\mathcal{C}$.

Συνεπώς, η σύνθεση συναρτητών, δηλαδή η σύνθεση των βελών και, αντίστοιχα, η σύνθεση των αντικειμένων δύο κατηγοριών ευσταθεί και, ως εκ τούτου, λαμβάνουμε άλλη μια κατηγορία, γνωστή ως **Cat**. Τα αντικείμενα της κατηγορίας αυτής είναι κατηγορίες, ενώ τα βέλη της συναρτητές.

Παρατήρηση Με την ανάδυση της κατηγορίας **Cat** και φέρνοντας κατά νου το *Παράδοξο του Ράσελ*[4] μπορούμε να παρατηρήσουμε πως ο ορισμός της είναι προβληματικός. Στη Θεωρία Κατηγοριών αυτό το πρόβλημα ξεπερνιέται με τη διάκριση των κατηγοριών σε **μικρές** και **μεγάλες**, όπου μικρές είναι οι κατηγορίες των οποίων τα αντικείμενα μπορούν να θεωρηθούν και σύνολα. Επομένως, η **Cat** ορίζεται πλέον καλώς ως η κατηγορία των μικρών κατηγοριών, η οποία είναι μία μεγάλη κατηγορία.

Για την περαιτέρω κατανόηση και εξοικείωση με την έννοια του συναρτητή παρατίθενται μερικά παραδείγματα.

Παραδείγματα Συναρτητών

1. Ο συναρτητής του δυναμοσυνόλου P : **Set** $\to$ **Set** είναι ένας ενδοσυναρτητής της **Set**. Η συνάρτηση αντικειμένων αντιστοιχίζει σε καθε σύνολο X το σύνηθες δυναμοσύνολο $P(X)$ με στοιχεία όλα τα υποσύνολα $S \subset X$, ενώ η συνάρτηση βελών αντιστοιχίζει κάθε συνάρτηση $f : X \to Y$ στην $P(f) : P(X) \to P(Y)$, η οποία απεικονίζει κάθε $S \subset X$ στο σύνολο $f(S)$, όπου $f(S) \subset Y$. Ο συναρτητής είναι καλώς ορισμένος, επειδή ισχύει ότι $P(1_x) = 1_{P(X)}$ και $P(g \circ f) = P(g) \circ P(f)$.

2. Ο **εγκλειστικός συναρτητής** Inc : **Vec**$_{fd}$ $\to$ **Vec**, ο οποίος απεικονίζει κάθε διανυσματικό χώρο πεπερασμένης διάστασης στον εαυτό του, περιλαμβάνοντας όμως στην κατηγορία που καταλήγει και όλους τους υπόλοιπους, δηλαδή και τους απειροδιάστατους χώρους.

3. Ο **σταθερός συναρτητής** απεικονίζει κάθε αντικείμενο A της $\mathcal{C}$ σε ένα αντικείμενο B της $\mathcal{D}$ και κάθε βέλος της $\mathcal{C}$ στο ταυτοτικό βέλος της $\mathcal{D}$.

4. Ο **επιλήσμων συναρτητής** U : **Mon** $\to$ **Set** απεικονίζει κάθε μονοειδές $(M, \cdot, e)$ στο σύνολο M και κάθε ομοιομορφισμό $h : (M, \cdot, e) \to (M', \cdot', e')$ στην αντίστοιχη συνάρτηση $h : M \to M'$ μεταξύ των συγκεκριμένων συνόλων. Ονομάζεται έτσι διότι «ξεχνά» τη δομή που χαρακτηρίζει το μονοειδές.

5. Ο **ελεύθερος συναρτητής**, σε αντίθεση με τον επιλήσμονα συναρτητή, δημιουργεί μια πλουσιότερη δομή σε μια κατηγορία. Παραδείγματος χάρη, ελεύθερος είναι ο συναρτητής F : **Set** $\to$ **Grp**, ο οποίος αντιστοιχίζει κάθε σύνολο στην ελεύθερη ομάδα[5] που δημιουργείται από αυτό και κάθε συνάρτηση στον ομομορφισμό μεταξύ των αντίστοιχων ελεύθερων ομάδων.

Ορισμός 1.2.5. Έστω ο συναρτητής $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. Τότε ο συναρτητής $F^{op} : \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}$ λέγεται **ανταλλοίωτος** ή **αντίθετος** και απεικονίζει κάθε αντικείμενο A της $\mathcal{C}$ σε ένα αντικείμενο $F^{op}(A)$ της $\mathcal{D}$ και κάθε βέλος $f : A \to B$ σε ένα βέλος $F^{op}(f) : F^{op}(B) \to F^{op}(A)$ της $\mathcal{D}$.

[4]Έστω $S = \{x : x \notin x\}$. Τότε $S \in S$ αν και μόνο αν $S \notin S$.

[5]Μία ομάδα G ονομάζεται **ελεύθερη** αν υπάρχει σύνολο $S \subset G$ τέτοιο ώστε κάθε στοιχείο της G να μπορεί να γραφτεί με έναν και μοναδικό τρόπο ως γινόμενο πεπερασμένου πλήθους στοιχείων του S και των αντιστρόφων αυτών των στοιχείων.

Παράδειγμα 1.2.6. Όπως ορίσαμε το συναρτητή του δυναμοσυνόλου, P, μπορούμε να ορίσουμε τον αντίθετό του, $P^{op} : \mathbf{Set}^{op} \to \mathbf{Set}$, για τον οποίο ισχύει ότι

$$A \mapsto P^{op}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$$
$$f : A \to B \mapsto P^{op}(f) : P^{op}(B) \to P^{op}(A), \text{όπου } P^{op}(f)(Y) = f^{-1}[Y].$$

Ορισμός 1.2.7. Έστω μια κατηγορία $\mathcal{C}$. Αν A αντικείμενό της, τότε ορίζεται ο συναρτητής $\mathcal{C}(A, -) : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$. Αυτός ο συναρτητής αντιστοιχίζει κάθε αντικείμενο B της $\mathcal{C}$ στο σύνολο $\mathcal{C}(A, B)$ των βελών από το A στο B και κάθε βέλος $f : B \to C$ της $\mathcal{C}$ στη συνάρτηση $\mathcal{C}(A, f) : \mathcal{C}(A, B) \to \mathcal{C}(A, C)$ με $\mathcal{C}(A, f)(g : A \to B) = f \circ g$, όπου προφανώς η σύνθεση στο δεξί μέλος της ισότητας διενεργείται εντός της $\mathcal{C}$. Ο συναρτητής $\mathcal{C}(A, -)$ λέγεται **συναρτητής ομομορφισμού** (hom-functor). Αντίστοιχα ορίζεται και ο **ανταλλοίωτος συναρτητής ομομορφισμού** $\mathcal{C}(-, B)$.

Σε αυτήν την ενότητα, λοιπόν, είδαμε το συναρτητή, ο οποίος γενικεύει την έννοια της συνάρτησης, αφού τα ορίσματά του είναι και συναρτήσεις. Στην επόμενη ενότητα θα δούμε πώς σχετίζονται οι συναρτητές μεταξύ τους.

1.3 Τι είναι ο φυσικός μετασχηματισμός

Το πλέγμα των κατηγοριών και των συναρτητών μεταξύ των κατηγοριών εμπλουτίζεται ακόμα περισσότερο με την εμφάνιση απεικονίσεων μεταξύ των συναρτητών. Αυτές τις απεικονίσεις τις αποκαλούμε φυσικούς μετασχηματισμούς.

Ορισμός 1.3.1. Έστω δύο συναρτητές $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. Ένας **φυσικός μετασχηματισμός** $\vartheta : F \dot{\to} G$ είναι μια απεικόνιση, η οποία αντιστοιχίζει κάθε αντικείμενο A της $\mathcal{C}$ σε ένα βέλος $\vartheta_A : F(A) \to G(A)$ της $\mathcal{D}$, το οποίο καλείται **συνιστώσα** του ϑ στη $\mathcal{C}$, έτσι ώστε για κάθε μορφισμό $f : A \to B$ να ισχύει

$$\vartheta_B \circ F(f) = G(f) \circ \vartheta_A$$

δηλαδή το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\vartheta_A"'] & F(B) \arrow[d, "\vartheta_B"] \\ G(A) \arrow[r, "G(f)"'] & G(B) \end{tikzcd}$$

να είναι αντιμεταθετικό. Όταν ισχύει η προηγούμενη σχέση, μπορούμε επίσης να πούμε πως ο μορφισμός $\vartheta_A : F(A) \to G(A)$ είναι **φυσικός** στο A.

Ορισμός 1.3.2. Αν κάθε συνιστώσα ϑ_A του ϑ είναι ισομορφισμός[6] στην $\mathcal{D}$, τότε ο ϑ ονομάζεται **φυσικός ισομορφισμός**. Δύο συναρτητές λέγονται **φυσικά ισομορφικοί** ή απλώς **ισομορφικοί**, αν υπάρχει φυσικός ισομορφισμός μεταξύ αυτών.

Παρατήρηση Αν φανταστούμε το συναρτητή F ως αυτόν που μας δίνει την εικόνα όλων των αντικειμένων και των βελών της $\mathcal{C}$ στην $\mathcal{D}$, τότε ο φυσικός μετασχηματισμός ϑ είναι

[6]Όπως προαναφέρθηκε, ισομορφισμός λέγεται κάθε αντιστρέψιμο βέλος. Στην επόμενη ενότητα θα ασχοληθούμε εκτενέστερα με την έννοια αυτή.

μία συλλογή βελών που απεικονίζουν (ή μεταφράζουν) την εικόνα του F στην εικόνα του G, έτσι ώστε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[rr, "\vartheta_A"] \arrow[dr, "F(f)"] \arrow[dd, "F(h)"'] & & G(A) \arrow[dr, "G(f)"] \arrow[dd, "G(h)"'] & \\
& F(B) \arrow[rr, "\vartheta_B"] \arrow[dl, "F(g)"] & & G(B) \arrow[dl, "G(g)"] \\
F(C) \arrow[rr, "\vartheta_C"'] & & G(C) &
\end{tikzcd}$$

να είναι αντιμεταθετικό.

Ακολουθεί ένα παράδειγμα έτσι ώστε να καταστεί αντιληπτό το τι νοούμε ως φυσικό και ειδικότερα ισομορφικό μετασχηματισμό.

Πρόταση 1.3.3. *Κάθε ομάδα είναι φυσικά ισόμορφη με την αντίθετή της.*[7] *Αυτό μπορεί να οριστεί ως συναρτητής από ομάδες σε ομάδες, έτσι ώστε* $f^{op} = f$ *για κάθε ομομορφισμό ομάδων* $f : G \to H$*. Για τον ορισμό αυτού του συναρτητή, η απεικόνιση* $f^{op} : G^{op} \to H^{op}$ *πρέπει να είναι ομομορφισμός. Αυτό ισχύει πράγματι, καθώς παρατηρούμε πως για κάθε* $a, b \in G$ *και* $f : G \to H$ *έχουμε ότι*

$$f^{op}(a * b) = f(b * a) = f^{op}(a) *^{op} f^{op}(b)$$

Το τελευταίο μάς δείχνει τι χρειάζεται για να επιβεβαιώσουμε τη φυσικότητα του μετασχηματισμού: πρέπει να αποδείξουμε ότι ο ταυτοτικός συναρτητής μεταξύ ομάδων είναι φυσικά ισομορφικός με τον αντίθετο συναρτητή, όπως αυτός ορίστηκε πρωτύτερα. Έτσι, πρέπει να δώσουμε τον ισομορφισμό $\vartheta_G : G \to G^{op}$ *ώστε το σχετικό διάγραμμα που θα ορίζει τη φυσικότητα να είναι αντιμεταθετικό.*

Απόδειξη. Έστω $\vartheta_G(a) = a^{-1}, \forall a \in G$. Έχουμε ότι $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ και $(a^{-1})^{-1} = a$, δηλαδή η ϑ_G είναι η αντίστροφη του εαυτού της. Έστω, τώρα, $f : G \to H$ ένας ομομορφισμός ομάδων. Έχοντας υπόψη ότι $f^{op} = f$ και $f(a)^{-1} = f(a^{-1})$, το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\vartheta_G"'] & H \arrow[d, "\vartheta_H"] \\
G^{op} \arrow[r, "f^{op}"'] & H^{op}
\end{tikzcd}$$

μας δίνει το φυσικό μετασχηματισμό.

Για την ισομορφία του μετασχηματισμού, αρκεί να δείξουμε ότι κάθε ϑ_G έχει πράγματι αντίστροφο. Έστω ο μορφισμός $\vartheta_{G^{op}}$ με $\vartheta_{G^{op}}(b) = b^{-1}$. Όμως, από τον ορισμό του G^{op}, ισχύει ότι $b^{-1} \in G$. Οπότε $\vartheta_G^{-1} = \vartheta_{G^{op}}$ για κάθε G, άρα ο μετασχηματισμός είναι ισομορφικός. □

Ορισμός 1.3.4. Μια **σύζευξη** αποτελείται από

- ένα ζεύγος κατηγοριών $\mathcal{C}, \mathcal{D}$
- ένα ζεύγος συναρτητών $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}, G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$

[7] Αν G μια ομάδα, τότε η αντίθετή της G^{op} αναφέρεται στο ίδιο σύνολο, ενώ οι μορφισμοί της είναι αντεστραμμένοι, δηλαδή $a * b \in G \mapsto b *^{op} a \in G^{op}$.

- ένα φυσικό μετασχηματισμό $\vartheta : I_{\mathcal{C}} \dot{\to} (G \circ F)$

ώστε για κάθε $\mathcal{C}$-αντικείμενο A και $\mathcal{C}$-βέλος $f : A \to G(B)$, να υπάρχει μοναδικό $\mathcal{D}$-βέλος $f^\sharp : F(A) \to B$ ώστε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\vartheta_A"] \arrow[dr, "f"'] & G(F(A)) \arrow[d, dashed, "G(f^\sharp)"] \\ & G(B) \end{tikzcd}$$

να είναι αντιμεταθετικό. Σε αυτήν την περίπτωση λέμε πως οι συναρτητές (F, G) είναι **συζυγείς** και ότι ο F είναι ο **αριστερά συζυγής** του G και ο G ο **δεξιά συζυγής** του F. Ο φυσικός μετασχηματισμός ϑ λέγεται **μονάδα** της σύζευξης, ενώ **συμμονάδα** της σύζευξης λέγεται ο φυσικός μετασχηματισμός $\varepsilon : F \circ G \to 1_{\mathcal{D}}$ και αποτελεί τη δυϊκή έννοια της μονάδας.

1.4 Τα περιεχόμενα μιας κατηγορίας

Μετά την παρουσίαση των τριών βασικών εννοιών της Θεωρίας Κατηγοριών, δηλαδή της κατηγορίας, του συναρτητή και του φυσικού μετασχηματισμού, επιστρέφουμε για μια ενδοσκόπηση στην ίδια την κατηγορία: στα αντικείμενά της, στα βέλη της και στον κόσμο τον οποίο αμφότερα δημιουργούν.

1.4.1 Τα βέλη

Όταν πραγματευόμαστε συναρτήσεις, συχνά ενδιαφερόμαστε για διάφορες ιδιότητές τους, όπως το αν είναι 1-1, επί ή αμφιμονοσήμαντες. Αντίστοιχο ενδιαφέρον τρέφουμε και για τα βέλη μιας κατηγορίας.

Ορισμός 1.4.1. Ένα βέλος $f : B \to C$ σε μια κατηγορία $\mathcal{C}$ είναι **μονομορφισμός** αν για κάθε ζεύγος $\mathcal{C}$-βελών $g, h : A \to B$ που ικανοποιεί την ισότητα $f \circ g = f \circ h$ έπεται ότι $g = h$.

Πρόταση 1.4.2. *Στην κατηγορία **Set**, οι μονομορφισμοί είναι αποκλειστικά οι 1-1 συναρτήσεις.*[8]

Απόδειξη. Θα δείξουμε το ζητούμενο με απαγωγή σε άτοπο. Έστω $f : B \to C$ μια 1-1 συνάρτηση και $g, h : A \to B$ με $f \circ g = f \circ h$. Έστω ότι $g \neq h$. Τότε για κάποιο $a \in A$, $g(a) \neq h(a)$. Επειδή, όμως, η f είναι 1-1 έχουμε ότι $f(g(a)) \neq f(h(a))$. Άτοπο, διότι από υπόθεση $f \circ g = f \circ h$. Άρα, το βέλος f είναι μονομορφισμός.

Αντίστροφα, έστω $f : B \to C$ μονομορφισμός. Αν η f δεν είναι 1-1, τότε υπάρχουν $b, b' \in B$ τέτοια ώστε $b \neq b' \Rightarrow f(b) = f(b')$. Έστω $A = \{a\}$, $g : A \to B$ με $g(a) = b$ και $h : A \to B$ με $h(a) = b'$. Τότε έχουμε $f(g(a)) = f(h(a))$. Άτοπο, διότι το βέλος f είναι μονομορφισμός. $\square$

Ορισμός 1.4.3. Ένα βέλος $f : A \to B$ είναι **επιμορφισμός** αν για κάθε ζεύγος βελών $g, h : B \to C$ που ικανοποιεί την ισότητα $g \circ f = h \circ f$ έπεται ότι $g = h$.

Πρόταση 1.4.4. *Στην κατηγορία **Set**, οι επιμορφισμοί είναι αποκλειστικά οι συναρτήσεις που είναι επί.*[9]

[8]Μια συνάρτηση $f : X \to Y$ λέγεται 1-1 αν για $x, y \in X$, ισχύει $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ ή $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.
[9]Μια συνάρτηση $f : X \to Y$ λέγεται επί αν $\forall x \in X\ \exists y \in Y : f(x) = y$.

Παρατήρηση Βλέπουμε πως ο επιμορφισμός είναι η δυϊκή έννοια του μονομορφισμού. Ο μονομορφισμός διέπεται από τον αριστερό νόμο της διαγραφής, ενώ ο επιμορφισμός από το δεξιό νόμο της διαγραφής, όπως ακριβώς τους ξέρουμε από την Άλγεβρα.

Ορισμός 1.4.5. Ένα βέλος $f : A \to B$ είναι **ισομορφισμός** εάν υπάρχει ένα βέλος $f^{-1} : B \to A$, καλούμενο αντίστροφο του f, τέτοιο ώστε $f^{-1} \circ f = id_A$ και $f \circ f^{-1} = id_B$. Τα αντικείμενα A και B καλούνται ισομορφικά. Δύο ισομορφικά αντικείμενα συχνά αναφέρονται ως ταυτόσημα **μέχρις ισομορφισμού**.

Καθολικές κατασκευές

Στην ενότητα αυτή θα εξετάσουμε μερικές καθολικές κατασκευές στις κατηγορίες. Οι απλούστερες αυτών είναι το αρχικό και η δυϊκή του έννοια: το τελικό αντικείμενο.

1.4.2 Αρχικά και τελικά αντικείμενα

Ορισμός 1.4.6. *Ένα αντικείμενο 0 λέγεται* **αρχικό** *αν για κάθε αντικείμενο A υπάρχει μόνο ένα βέλος από το 0 στο A.*

Ορισμός 1.4.7. *Ένα αντικείμενο 1 λέγεται* **τελικό** *ή* **συναρχικό** *αν για κάθε αντικείμενο A υπάρχει μόνο ένα βέλος από το A στο 1.*

Τα βέλη που ξεκινούν από ένα αρχικό αντικείμενο ή καταλήγουν σε ένα τελικό αντικείμενο συχνά συμβολίζονται ως

$$A \xrightarrow{!} 1$$

έτσι ώστε να επισημανθεί η μοναδικότητά τους.

Παράδειγμα 1.4.8. Στην κατηγορία **Set**, το κενό σύνολο είναι το μόνο αρχικό αντικείμενο. Για κάθε σύνολο A, η κενή συνάρτηση είναι η μοναδική συνάρτηση από το $\emptyset$ στο A. Κάθε μονοσύνολο είναι τελικό αντικείμενο, αφού για κάθε σύνολο A υπάρχει μια συνάρτηση από το A στο μονοσύνολο $\{x\}$ που απεικονίζει κάθε στοιχείο του A στο x.

Πρόταση 1.4.9. *Τα αρχικά αντικείμενα μιας κατηγορίας είναι μοναδικά μέχρις ισομορφισμού, δηλαδή δύο αρχικά αντικείμενα στην ίδια κατηγορία πρέπει να είναι ισομορφικά. Αντίστοιχα, δύο τελικά αντικείμενα μέσα στην ίδια κατηγορία είναι ισομορφικά.*

Απόδειξη. Έστω δύο αρχικά αντικείμενα s, s'. Τότε υπάρχουν μοναδικά βέλη $f : s \to s'$ και $g : s' \to s$. Επίσης, υπάρχουν μοναδικά ταυτοτικά βέλη $s \to s$ και $s' \to s'$. Επειδή $f \circ g = g \circ f = 1_s = 1_{s'}$, τότε τα s, s' είναι ισομορφικά. Ομοίως, αποδεικνύεται και η μοναδικότητα μέχρις ισομορφισμού των τελικών αντικειμένων. □

Ορισμός 1.4.10. *Ένα βέλος από ένα τελικό αντικείμενο σε ένα αντικείμενο A λέγεται* **γενικό στοιχείο** *ή* **σταθερά** *του A.*

1.4.3 Γινόμενα

Ο συνήθης συνολοθεωρητικός ορισμός του καρτεσιανού γινομένου δύο συνόλων A και B είναι ο ακόλουθος:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ και } b \in B\}$$

Επίσης, με τον ορισμό του γινομένου, ορίζουμε τις συναρτήσεις προβολής

$$\pi_1 : A \times B \to A \text{ και } \pi_2 : A \times B \to B.$$

Πρόταση 1.4.11. *Έστω το καρτεσιανό γινόμενο $(A \times B)$ δύο συνόλων A, B και οι αντίστοιχες προβολές τους $\pi_1 \in A^{(A\times B)}, \langle x, y\rangle \longmapsto x$ και $\pi_2 \in B^{(A\times B)}, \langle x, y\rangle \longmapsto y$. Τότε για κάθε σύνολο C και συναρτήσεις $f \in A^C, g \in B^C$ υπάρχει μοναδική συνάρτηση $h \in (A \times B)^C$ τέτοια ώστε το διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "h"] \arrow[dr, "g"] & \\
A & (A \times B) \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & B
\end{tikzcd}$$

να είναι αντιμεταθετικό.

Απόδειξη. Η μοναδική συνάρτηση $h \in (A \times B)^C$ ορίζει την απεικόνιση $x \longmapsto \langle f(x), g(x)\rangle$. ☐

Ορισμός 1.4.12. Ένα **γινόμενο** (ζεύγους) δύο αντικειμένων A και B μιας κατηγορίας είναι ένα αντικείμενο $A \times B$ μαζί με δύο **βέλη προβολής** $\pi_1 : A \times B \to A$ και $\pi_2 : A \times B \to B$, έτσι ώστε για κάθε αντικείμενο C και κάθε ζεύγος βελών $f : C \to A$ και $g : C \to B$ να υπάρχει ακριβώς ένα **παρεμβαλλόμενο βέλος** $\langle f, g\rangle : C \to A \times B$, το οποίο θα επιτρέπει στο διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "\langle f,g\rangle"] \arrow[dr, "g"] & \\
A & (A \times B) \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & B
\end{tikzcd}$$

να είναι αντιμεταθετικό. Δηλαδή, $\pi_1 \circ \langle f, g\rangle = f$ και $\pi_2 \circ \langle f, g\rangle = g$

Ορισμός 1.4.13. Αν $A \times C, B \times D$ είναι γινόμενα, τότε για κάθε ζεύγος βελών $\langle f, g\rangle$ με $f : A \to B$ και $g : C \to D$, η **απεικόνιση γινομένου** $f \times g : A \times C \to B \times D$ είναι το βέλος $\langle f \circ \pi_1, g \circ \pi_2\rangle$.

Ορισμός 1.4.14. Ένα **συγγινόμενο** δύο αντικειμένων A και B είναι ένα αντικείμενο $A + B$ μαζί με δύο βέλη προβολής $\iota_1 : A \to A + B$ και $\iota_2 : B \to A + B$, έτσι ώστε για κάθε αντικείμενο C και κάθε ζεύγος βελών $f : A \to C$ και $g : B \to C$ να υπάρχει ακριβώς ένα βέλος $[f, g] : A + B \to C$, το οποίο θα επιτρέπει στο διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\iota_1"] \arrow[dr, "f"'] & A + B \arrow[d, dashed, "{[f,g]}"] & B \arrow[l, "\iota_2"'] \arrow[dl, "g"] \\
 & C &
\end{tikzcd}$$

να είναι αντιμεταθετικό. Δηλαδή $[f, g] \circ \iota_1 = f$ και $[f, g] \circ \iota_2 = g$.

Ορισμός 1.4.15. Ένα γινόμενο μιας οικογένειας αντικειμένων $(A_i)_{i\in I}$ αποτελείται από ένα αντικείμενο $\prod_{i\in I} A_i$ και μια οικογένεια βελών προβολής $(\pi_i : (\prod_{i\in I} A_i) \to A_i)_{i\in I}$, έτσι ώστε για κάθε αντικείμενο C και κάθε οικογένεια βελών $(f_i : C \to A_i)_{i\in I}$ να υπάρχει ένα μοναδικό βέλος $\langle f_i\rangle_{i\in I} : C \to (\prod_{i\in I} A_i)$ που θα επιτρέπει στο διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[d, dashed, "\langle f_i\rangle_{i\in I}"'] \arrow[dr, "f_i"] & \\
\prod_{i\in I} A_i \arrow[r, "\pi_i"'] & A_i
\end{tikzcd}$$

να είναι αντιμεταθετικό για κάθε $i \in I$. Δηλαδή $\pi_i \circ \langle f_i\rangle = f_i$, $\forall i \in I$.

Αφού είδαμε παραδείγματα καθολικών κατασκευών μπορούμε τώρα να αποσαφηνίσουμε την έννοια της καθολικής κατασκευής.

Ορισμός 1.4.16. Μία **καθολική κατασκευή** περιγράφει μια κλάση αντικειμένων συνοδευόμενων από βέλη, τα οποία μοιράζονται μια κοινή ιδιότητα, και επιλέγει τα αντικείμενα που είναι τελικά όταν η κλάση αυτή θεωρείται κατηγορία.

Παράδειγμα 1.4.17. Ο ορισμός των γινομένων A και B στη $\mathcal{C}$ περιγράφει μία κλάση νιάδων (X, x_1, x_2) με $A \xleftarrow{x_1} X \xrightarrow{x_2} B$. Μπορούμε να αποκαλέσουμε τις νιάδες αυτές «σφήνες πάνω από τα A, B» και να τις φανταστούμε ως αντικείμενα της κατηγορίας των «σφηνών πάνω από τα A, B». Ένα βέλος της κατηγορίας αυτής, έστω $m : (W, w_1, w_2) \to (X, x_1, x_2)$ είναι ένα $\mathcal{C}$-βέλος $m : W \to X$ με $w_1 = x_1 \circ m$ και $w_2 = x_2 \circ m$, δηλαδή

$$\begin{tikzcd}
& W \arrow[d, "m"] \arrow[ddl, "w_1"'] \arrow[ddr, "w_2"] & \\
& X \arrow[dl, "x_1"] \arrow[dr, "x_2"'] & \\
A & & B
\end{tikzcd}$$

Ένα τελικό αντικείμενο στην κατηγορία των κορυφών, έστω (P, p_1, p_2) είναι ένα αντικείμενο με μοναδικό βέλος προς αυτό από κάθε κορυφή, δηλαδή

$$\begin{tikzcd}
& W \arrow[d, "!"] \arrow[ddl, "w_1"'] \arrow[ddr, "w_2"] & \\
& X \arrow[dl, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"'] & \\
A & & B
\end{tikzcd}$$

Οι έννοιες που ορίζονται από μια καθολική κατασκευή λέγονται **καθολικές** μεταξύ αυτών που ικανοποιούν μια δεδομένη ιδιότητα ή λέμε απλώς πως ικανοποιούν μια **καθολική ιδιότητα**. Τέλος, οι καθολικές κατασκευές είναι μοναδικές μέχρις ισομορφισμού.

1.4.4 Εξισωτές

Ορισμός 1.4.18. Έστω $f, g : A \to B$ δύο βέλη στη $\mathcal{C}$. Το ζεύγος $\langle E, e \rangle$ λέγεται **εξισωτής** των f και g στη $\mathcal{C}$ αν και μόνο αν ισχύουν τα ακόλουθα:

i. Το $e : E \to A$ είναι βέλος της $\mathcal{C}$.

ii. $f \circ e = g \circ e$

iii. Για κάθε $e' : E' \to A$ με $f \circ e' = g \circ e'$ υπάρχει ένα βέλος $\bar{e} : E' \to E$, τέτοιο ώστε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
E' \arrow[d, dashed, "\bar{e}"'] \arrow[dr, "e'"] & & \\
E \arrow[r, "e"'] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B
\end{tikzcd}$$

να είναι αντιμεταθετικό.

Ορισμός 1.4.19. Έστω $f, g : A \to B$ δύο βέλη στη $\mathcal{C}$. Το ζεύγος $\langle Q, q \rangle$ λέγεται **συνεξισωτής** των f και g στη $\mathcal{C}$ αν και μόνο αν ισχύουν τα ακόλουθα:

i. Το $q : B \to Q$ είναι βέλος της $\mathcal{C}$.

ii. $q \circ f = q \circ g$

iii. Για κάθε $q' : B \to Q'$ με $q' \circ f = q' \circ g$ υπάρχει ένα βέλος $\bar{q} : Q \to Q'$, τέτοιο ώστε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "q'"'] & Q \arrow[d, dashed, "\bar{q}"] \\ & & Q' \end{tikzcd}$$

να είναι αντιμεταθετικό.

Ορισμός 1.4.20. Έστω ένα αντικείμενο C και ένα ζεύγος βελών $f : A \to C$ και $g : B \to C$. Μία **εφέλκυση** της τριάδας $\langle C, f, g \rangle$ αποτελείται από ένα αντικείμενο P μαζί με δύο βέλη $g' : P \to A$, $f' : P \to B$ ώστε $f \circ g' = g \circ f'$ και για κάθε $i : X \to A$, $j : X \to B$ ώστε $f \circ i = g \circ j$, να υπάρχει ένα μοναδικό βέλος $k : X \to P$, το οποίο θα επιτρέπει στο διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, dashed, "k"] \arrow[drr, bend left, "j"] \arrow[ddr, bend right, "i"'] & & \\ & P \arrow[r, "f'"'] \arrow[d, "g'"] & B \arrow[d, "g"] \\ & A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

να είναι αντιμεταθετικό. Η εφέλκυση συμβολίζεται επίσης ως $P = A \underset{C}{\times} B$.

Παράδειγμα 1.4.21. Στην κατηγορία **Set**, αν $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$, τότε μια εφέλκυση των f, g είναι το

$$A \underset{C}{\times} B = \{(a, b) \in A \times B \mid f(a) = g(b)\}$$

με συναρτήσεις προβολής f', g' τέτοιες ώστε $f'(a, b) = b$ και $g'(a, b) = a$.

Ας δούμε τώρα τη δυϊκή έννοια της εφέλκυσης, την εξώθηση, η οποία ουσιαστικά προκύπτει αν αντιστρέψουμε όλα τα βέλη του διαγράμματος της εφέλκυσης.

Ορισμός 1.4.22. Έστω ένα αντικείμενο C και ένα ζεύγος βελών $f : C \to A$ και $g : C \to B$. Μία **εξώθηση** της τριάδας $\langle C, f, g \rangle$ αποτελείται από ένα αντικείμενο P μαζί με δύο βέλη $g' : A \to P$,$f' : B \to P$ ώστε $g' \circ f = f' \circ g$ και για κάθε $i : A \to Q$, $j : B \to Q$ ώστε $i \circ f = j \circ g$, να υπάρχει ένα μοναδικό βέλος $u : P \to Q$, το οποίο θα επιτρέπει στο διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} Q & & \\ & P \arrow[ul, dashed, "u"'] & B \arrow[l, "f'"] \arrow[ull, bend right, "j"'] \\ & A \arrow[u, "g'"] \arrow[uul, bend left, "i"] & C \arrow[l, "f"] \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

να είναι αντιμεταθετικό.

1.4.5 Όρια

Τα αρχικά και τελικά αντικείμενα, τα γινόμενα και τα συγγινόμενα, οι εξισωτές και οι συνεξισωτές, οι εφελκύσεις και οι εξωθήσεις είναι παραδείγματα καθολικών και συγκαθολικών κατασκευών. Όλα αυτά αποτελούν ειδικές εκφράσεις των γενικοτέρων εννοιών, του ορίου και του συνορίου ενός διαγράμματος.

Ορισμός 1.4.23. Έστω η κατηγορία $\mathcal{C}$ και $\mathbf{D}$ ένα διάγραμμα της $\mathcal{C}$. Ένας **κώνος** του $\mathbf{D}$ είναι ένα αντικείμενο X της $\mathcal{C}$ και μια οικογένεια βελών $f_i : X \to D_i$, όπου D_i αντικείμενα του $\mathbf{D}$, τέτοια ώστε για κάθε βέλος g του $\mathbf{D}$, το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f_i"'] \arrow[dr, "f_j"] & \\ D_i \arrow[rr, "g"'] & & D_j \end{tikzcd}$$

να είναι αντιμεταθετικό. Οι κώνοι συμβολίζονται ως $\{f_i : X \to D_i\}$.

Ορισμός 1.4.24. Ένα **όριο** ενός διαγράμματος $\mathbf{D}$ είναι ο κώνος $\{f_i : X \to D_i\}$ με την ακόλουθη ιδιότητα: Αν $\{f'_i : X' \to D_i\}$ είναι ένας άλλος κώνος του $\mathbf{D}$, τότε υπάρχει μοναδικό βέλος $k : X' \to X$ τέτοιο ώστε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[rr, dashed, "k"] \arrow[dr, "f'_i"'] & & X \arrow[dl, "f_i"] \\ & D_i & \end{tikzcd}$$

να είναι αντιμεταθετικό.

Ορισμός 1.4.25. Ένας **συγκώνος** ενός διαγράμματος $\mathbf{D}$ μιας κατηγορίας $\mathcal{C}$ είναι ένα αντικείμενο X και μια οικογένεια βελών $f_i : D_i \to X$ τέτοια ώστε $f_j \circ g = f_i$, για κάθε g του $\mathbf{D}$. Ένα **συνόριο** του $\mathbf{D}$ είναι ένας συγκώνος $\{f_i : D_i \to X\}$ με την ακόλουθη συγκαθολική ιδιότητα: Αν $\{f'_i : D_i \to X'\}$ είναι ένας άλλος συγκώνος του $\mathbf{D}$, τότε υπάρχει μοναδικό βέλος $k : X \to X'$ ώστε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, dashed, "k"] & & X' \\ & D_i \arrow[ul, "f_i"] \arrow[ur, "f'_i"'] & \end{tikzcd}$$

να είναι αντιμεταθετικό για κάθε αντικείμενο D_i του $\mathbf{D}$.

1.4.6 Εκθετικότητα

Η τελευταία καθολική κατασκευή που εξετάζουμε αφορά μια ερμηνεία του currying από την οπτική της Θεωρίας Κατηγοριών. Το **currying** είναι μια διαδικασία μετασχηματισμού μιας συνάρτησης που δέχεται περισσότερα από ένα ορίσματα σε μία άλλη που δέχεται ένα όρισμα. Η τελευταία επιστρέφει μια νέα συνάρτηση, η οποία ως ορίσματα έχει αυτά που έχουν απομείνει από την αρχική.

Για να γίνει αντιληπτή αυτή η διαδικασία θα δούμε πώς εφαρμόζεται στην κατηγορία **Set**. Έστω A, B σύνολα. Τότε η συλλογή $B^A = \{f : A \to B\}$ είναι επίσης σύνολο. Εμείς όμως θέλουμε να χαρακτηρίσουμε το σύνολο αυτό βάσει των βελών του. Συνεπώς, παρατηρούμε ότι το B^A σχετίζεται με μια ειδική **συνάρτηση εκτίμησης**, την $eval : (B^A \times A) \to B$

με $eval(f, a) = f(a)$. Δηλαδή δοθέντος ενός ζεύγους (f, a) με $f : A \to B$ και $a \in A$, αυτή επιστρέφει $f(a) \in B$.

Η κατηγορική οπτική του B^A στηρίζεται στο ότι η συνάρτηση εκτίμησης φέρει μια καθολική ιδιότητα σε σχέση με όλες τις $g : C \times A \to B$. Για κάθε g, υπάρχει μοναδική $curry(g) : C \to B^A$ τέτοια ώστε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} B^A \times A \arrow[r, "eval"] & B \\ C \times A \arrow[u, dashed, "curry(g)\times id_A"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

να είναι αντιμεταθετικό. Η συνάρτηση $curry(g) \times id_A$ είναι μια απεικόνιση γινομένου, η οποία ορίζεται ως

$$(c, a) \to (curry(g)(c), a).$$

Για την g ισχύει $g_c(a) = g(c, a)$, ενώ για την $curry(g)$ ισχύει $curry(g)(c) = g_c$. Άρα, για κάθε $(c, a) \in C \times A$ έχουμε ότι

$$(eval \circ (curry(g) \times id_A))(c, a) = eval(curry(g)(c), a) = eval(g_c, a) = g_c(a) = g(c, a).$$

Το τελευταίο αποδεικνύει ότι το προηγούμενο διάγραμμα είναι αντιμεταθετικό.

Ορισμός 1.4.26. Έστω $\mathcal{C}$ μια κατηγορία όλων των γινομένων ζεύγους και X, Y αντικείμενα της $\mathcal{C}$. Το αντικείμενο Y^X είναι **εκθετικό** αν υπάρχει ένα βέλος $eval_X : (Y^X \times X) \to Y$ τέτοιο ώστε για κάθε αντικείμενο Z και βέλος $g : (Z \times X) \to Y$ να υπάρχει μοναδικό βέλος $curry(g) : Z \to Y^X$, το οποίο να καθιστά το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} Y^X \times X \arrow[r, "eval_{XY}"] & Y \\ Z \times X \arrow[u, dashed, "curry(g)\times id_X"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

αντιμεταθετικό.

Αν η κατηγορία $\mathcal{C}$ έχει ένα εκθετικό αντικείμενο Y^X για κάθε ζεύγος αντικειμένων X, Y, τότε αυτή είναι **εκθετική**.

1.5 Καρτεσιανά κλειστές κατηγορίες

Ας δούμε, τώρα, ένα απλό παράδειγμα για το πώς μπορούν να συνδυαστούν όλα τα προηγούμενα έτσι ώστε να δομηθεί μία πολυπλοκότερη κατασκευή που να τα αξιοποιεί και να έχει νόημα. Πρόκειται για την κατασκευή της καρτεσιανά κλειστής κατηγορίας.

Ορισμός 1.5.1. Μία κατηγορία $\mathcal{C}$ λέγεται **καρτεσιανά κλειστή** αν και μόνο αν ισχύουν τα ακόλουθα

- Έχει ένα τελικό αντικείμενο.
- Κάθε ζεύγος αντικειμένων A, B σχηματίζει ένα γινόμενο $A \times B$ στη $\mathcal{C}$.
- Κάθε ζεύγος αντικειμένων B, C σχηματίζει ένα εκθετικό C^B στη $\mathcal{C}$.

Ας δούμε δύο καρτεσιανά κλειστές κατηγορίες για να καταλάβουμε καλύτερα περί τίνος πρόκειται.

- Η **Set**. Τελικό της αντικείμενο είναι το μονοσύνολο (το οποίο είναι μοναδικό μέχρις ισομορφισμού), γινόμενό της είναι το καρτεσιανό γινόμενο πεπερασμένου αριθμού συνόλων και εκθετικό της αντικείμενο είναι το σύνολο των συναρτήσεων μεταξύ δύο συνόλων.

- Έστω η συνάρτηση του δυναμοσυνόλου $P : S \to P(S)$ με $P(S) = \{T : T \subseteq S\}$, η οποία αντιστοιχίζει κάθε σύνολο S στο σύνολο όλων των υποσυνόλων του. Ο μερικά διατεταγμένος χώρος $(P(S), \subseteq)$ είναι μια καρτεσιανά κλειστή κατηγορία. Πράγματι, τελικό αντικείμενο της $(P(S), \subseteq)$ είναι το σύνολο S, αφού $\forall T \in P(S), T \subseteq S$. Επίσης, γινόμενό της είναι το καρτεσιανό γινόμενο πεπερασμένου αριθμού υποσυνόλων του S και εκθετικό της αντικείμενο είναι το σύνολο των συναρτήσεων μεταξύ δύο υποσυνόλων του S.

Οι καρτεσιανά κλειστές κατηγορίες ανακύπτουν και στο πεδίο της Μαθηματικής Λογικής. Για να δοθεί ένα παράδειγμα, ας ορίσουμε πρώτα μερικές έννοιες που θα μας βοηθήσουν στην κατανόησή του, τις οποίες τις λαμβάνουμε από το [5].

Ορισμός 1.5.2. Το **αλφάβητο** μιας γλώσσας είναι ένα σύνολο συμβόλων αποτελούμενο από

- τα σύμβολα λογικών συνδέσμων $\neg$ (όχι), $\vee$ (ή), $\wedge$ (και), $\to$ (συνεπάγεται)[10]

- παρενθέσεις, αριστερή (και δεξιά)

- σύμβολα προτάσεων ή προτασιακές μεταβλητές, δηλαδή ένα αριθμήσιμο σύνολο συμβόλων $A_1, A_2, ..., A_n, ...$.

Ορισμός 1.5.3. **Έκφραση** μιας γλώσσας είναι μία πεπερασμένη ακολουθία συμβόλων του αλφαβήτου.

Ορισμός 1.5.4. **Σωστές εκφράσεις** ή **προτασιακοί τύποι** μιας γλώσσας είναι οι εκφράσεις που ορίζονται, επαγωγικά, ως εξής:

(i) Τα σύμβολα προτάσεων είναι προτασιακοί τύποι.

(ii) Αν ϕ και ψ είναι προτασιακοί τύποι, τότε οι εκφράσεις $(\phi \wedge \psi), (\phi \vee \psi), (\phi \to \psi), (\neg\phi)$ είναι προτασιακοί τύποι.

(iii) Μόνο οι εκφράσεις που σχηματίζονται από μια διαδοχική εφαρμογή των (i), (ii) είναι προτασιακοί τύποι.

Ορισμός 1.5.5. **Πρόταση** είναι μια έκφραση που επιδέχεται μόνο μία αληθοτιμή, δηλαδή είναι είτε αληθής είτε ψευδής.

Ορισμός 1.5.6. **Προτασιακός λογισμός** είναι η τυπική λογική βάση που αφορά τις σχέσεις μεταξύ προτάσεων, οι οποίες συνδέονται με λογικούς συνδέσμους.

Μια καρτεσιανά κλειστή κατηγορία, λοιπόν, είναι η κατηγορία των προτασιακών τύπων του προτασιακού λογισμού. Αντικείμενά της είναι οι προτασιακοί τύποι και βέλη της οι συνεπαγωγές μεταξύ αυτών. Τελικό αντικείμενό της είναι η ταυτολογία $\top$. Αν P, Q προτάσεις και η σύζευξη $\wedge$ αντιστοιχεί στην έννοια του καρτεσιανού γινομένου, τότε γινόμενο της συγκεκριμένης κατηγορίας είναι το αντικείμενο $P \wedge Q$. Εκθετικό της αντικείμενο είναι το Q^P που αντιστοιχεί στη συνεπαγωγή $P \to Q$.

[10] Στο επόμενο κεφάλαιο θα αναλυθούν οι σύνδεσμοι λεπτομερέστερα.

1.6 Συμμετρικές μονοειδείς κλειστές κατηγορίες

Όπως ορίσαμε το γινόμενο μεταξύ αντικειμένων μιας κατηγορίας (1.4.12) , αντίστοιχα ορίζεται και η κατηγορία γινομένου.

Ορισμός 1.6.1. Δοθεισών δύο κατηγοριών $\mathcal{C}, \mathcal{D}$, κατασκευάζουμε μια νέα, $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ καλούμενη **κατηγορία γινομένου**, με τον εξής τρόπο:

- Κάθε αντικείμενο της $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ είναι ένα ζεύγος (A, B), αντικειμένων A της $\mathcal{C}$ και B της $\mathcal{D}$.

- Κάθε βέλος $(A, B) \to (A', B')$ της $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ είναι ένα ζεύγος βελών (f, g) με $f : A \to A'$, $g : B \to B'$.

- Η σύνθεση δύο τέτοιων βελών

$$(A, B) \xrightarrow{f,g} (A', B') \xrightarrow{f',g'} (A'', B'')$$

  ορίζεται με τη βοήθεια των συνθέσεων εντός των $\mathcal{C}$ και $\mathcal{D}$ ως $(f', g') \circ (f, g) = (f' \circ f, g' \circ g)$.

Οι συναρτητές $\mathcal{C} \xleftarrow{F} \mathcal{C} \times \mathcal{D} \xrightarrow{G} \mathcal{D}$ λέγονται προβολές του γινομένου και έχουν την ακόλουθη ιδιότητα:

Δοθείσης μιας κατηγορίας $\mathcal{E}$ και δύο συναρτητών $\mathcal{C} \xleftarrow{R} \mathcal{E} \xrightarrow{T} \mathcal{D}$, υπάρχει μοναδικός συναρτητής $H : \mathcal{E} \to \mathcal{C} \times \mathcal{D}$, τέτοιος ώστε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{E} \arrow[dl, "R"'] \arrow[d, dashed, "H"] \arrow[dr, "T"] & \\ \mathcal{C} & \mathcal{C} \times \mathcal{D} \arrow[l, "F"] \arrow[r, "G"] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$

να είναι αντιμεταθετικό.

Ορισμός 1.6.2. Μια **μονοειδής κατηγορία** $\mathcal{V} = (\mathcal{V}_0, \otimes, I, a, l, r)$ αποτελείται από μία κατηγορία $\mathcal{V}_0$, ένα συναρτητή $\otimes : \mathcal{V}_0 \times \mathcal{V}_0 \to \mathcal{V}_0$, ένα αντικείμενο I της $\mathcal{V}_0$ και τρεις φυσικούς μετασχηματισμούς $a_{XYZ} : (X \otimes Y) \otimes Z \to X \otimes (Y \otimes Z)$, $l_X : I \otimes X \to X$, $r_X : X \otimes I \to X$ που υπόκεινται σε δύο αξιώματα συνέπειας τέτοια ώστε τα διαγράμματα

$$\begin{tikzcd} ((W \otimes X) \otimes Y) \otimes Z \arrow[r, "a"] \arrow[d, "a\otimes 1"'] & (W \otimes X) \otimes (Y \otimes Z) \arrow[r, "a"] & W \otimes (X \otimes (Y \otimes Z)) \\ (W \otimes (X \otimes Y)) \otimes Z \arrow[rr, "a"'] & & W \otimes ((X \otimes Y) \otimes Z) \arrow[u, "1\otimes a"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} (X \otimes I) \otimes Y \arrow[rr, "a"] \arrow[dr, "r\otimes 1"'] & & X \otimes (I \otimes Y) \arrow[dl, "1\otimes l"] \\ & X \otimes Y & \end{tikzcd}$$

να είναι αντιμεταθετικά.

Ορισμός 1.6.3. Έστω ότι υπάρχει φυσικός μετασχηματισμός $s_{XY} : X \otimes Y \to Y \otimes X$, τέτοιος ώστε τα διαγράμματα

$$\begin{tikzcd} X \otimes Y \arrow[r, "s_{X,Y}"] \arrow[dr, "id"'] & Y \otimes X \arrow[d, "s_{Y,X}"] \\ & X \otimes Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Y \otimes I \arrow[rr, "s_{Y,I}"] \arrow[dr, "\simeq"'] & & I \otimes Y \arrow[dl, "\simeq"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} X \otimes (Y \otimes Z) \arrow[r, "a"] \arrow[d, "id_X \otimes s_{Y,Z}"'] & (X \otimes Y) \otimes Z \arrow[r, "s_{X\otimes Y,Z}"] & Z \otimes (X \otimes Y) \arrow[d, "a"] \\ X \otimes (Z \otimes Y) \arrow[r, "a"] & (X \otimes Z) \otimes Y \arrow[r, "s_{X,Z}\otimes id"] & (Z \otimes X) \otimes Y \end{tikzcd}$$

να είναι αντιμεταθετικά. Τότε η μονοειδής κατηγορία $\mathcal{V}$ είναι **συμμετρική**.

Ορισμός 1.6.4. Μία **συμμετρική μονοειδής κλειστή κατηγορία** (σμκκ) $\mathcal{C}$ είναι μία συμμετρική μονοειδής κατηγορία τέτοια ώστε κάθε αντικείμενο X της $\mathcal{C}$ με $- \otimes X : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ έχει δεξί συζυγή $X \multimap -$, δηλαδή έναν ισομορφισμό φυσικό στα Y, Z, ο οποίος ικανοποιεί την ισοδυναμία $\mathcal{C}(Z \otimes X, Y) \cong \mathcal{C}(Z, X \multimap Y)$. Αυτό είναι το ανάλογο του μονοεδιούς της καρτεσιανά κλειστής κατηγορίας. Το $X \multimap Y$ είναι το «γραμμικό εκθετικό» ή ο «χώρος γραμμικής συνάρτησης». Πιο συγκεκριμένα, υπάρχουν απεικονίσεις εκτίμησης και συνεκτίμησης ώστε να ικανοποιούνται οι συζεύξεις

$$(X \multimap Y) \otimes X \to Y \text{ και } Z \to (X \multimap (Z \otimes X)).$$

Ακολούθως παραθέτουμε τους ορισμούς του μοναδοειδούς και του συμμοναδοειδούς, οι οποίοι θα μας χρειαστούν στο τρίτο κεφάλαιο.

Ορισμός 1.6.5. Ένα **μοναδοειδές** μιας κατηγορίας $\mathcal{C}$ είναι μια τριάδα (T, η, μ), όπου $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ συναρτητής και $\eta : Id \to T$ (μονάδα) και $\mu : T^2 \to T$ (πολλαπλασιασμός) δύο φυσικοί ισομορφισμοί τέτοιοι ώστε τα διαγράμματα

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "T\eta"] \arrow[d, "\eta T"'] \arrow[dr, "id"] & T^2 \arrow[d, "\mu"] \\ T^2 \arrow[r, "\mu"'] & T \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T^3 \arrow[r, "\mu T"] \arrow[d, "T\mu"'] & T^2 \arrow[d, "\mu"] \\ T^2 \arrow[r, "\mu"'] & T \end{tikzcd}$$

να είναι αντιμεταθετικά.

Ορισμός 1.6.6. Ένα **συμμοναδοειδές** στην κατηγορία $\mathcal{D}$ είναι ένα μοναδοειδές στην $\mathcal{D}^{op}$. Επομένως, ένα μοναδοειδές είναι ένας συναρτητής $G : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ μαζί με δύο φυσικούς μετασχηματισμούς $\varepsilon : G \to Id$ (συμμονάδα) και $\delta : G \to G^2$ (συμπολλαπλασιασμός), οι οποίοι ικανοποιούν τα δυϊκά των δύο παραπάνω διαγραμμάτων.

Κεφάλαιο 2

Κατηγοριακές γραμματικές

Οι ποσότητες του λόγου και οι σχέσεις μεταξύ τους συχνά δύνανται να εκφραστούν στη θεμελιακή τους φύση με τη βοήθεια μαθηματικών τύπων.[...] Η απλή έκφραση [σ.σ. των γλωσσικών εννοιών] είτε θα είναι αλγεβρική είτε δε θα είναι τίποτα.[...] Καταλήγουμε σε θεωρήματα που πρέπει να αποδείξουμε.

Ferdinand de Saussure[1]

Η **γραμματική** είναι ένας τυπικός μηχανισμός που χαρακτηρίζει μια γλώσσα. Αυτό σημαίνει ότι, δοθείσης μιας σειράς συμβόλων, η γραμματική αποφασίζει, σε ένα πεπερασμένο αριθμό βημάτων, αν αυτή η έκφραση ανήκει ή όχι στη γλώσσα [33]. Μία γραμματική μπορεί να ιδωθεί ως ένα είδος συστήματος συμπερασμού, υποκείμενο σε συγκεκριμένους περιορισμούς.

Οι **κατηγοριακές γραμματικές**[2] είναι τυπικά συστήματα για την περιγραφή των φυσικών γλωσσών και αποτελούν έναν από τους παλαιότερους φορμαλισμούς λεξικοποιημένων γραμματικών, όπου όλα τα γραμματικά συστατικά[3] κατηγοριοποιούνται βάσει του συντακτικού τους τύπου, πληροφορία η οποία δίνεται από το λεξικό της γλώσσας υπό μελέτη. Ο τύπος κάθε γραμματικού συστατικού αποτελεί είτε ένα όρισμα, δηλαδή μια κατηγορία, είτε μια συνάρτηση, δηλαδή ένα συναρτητή, που δέχεται ορίσματα ενός τύπου και επιστρέφει ορίσματα ενός άλλου τύπου. Αυτοί οι τύποι, οι κατηγορίες και οι συναρτητές, συνδέονται με προφανή τρόπο με τους σημασιολογικούς τύπους της γλωσσικής έκφρασης αυτής καθ' εαυτήν. Διαφοροποιούνται κυρίως στην πληροφορία που φέρουν σχετικά με τη γραμμική διάταξη της εκάστοτε γλώσσας στην οποία αναφέρονται.

Παρατήρηση Το επίθετο *κατηγορικός* αναφέρεται συνήθως είτε στις κατηγορίες, τόσο με την αριστοτελική έννοια του όρου όσο και μια ευρύτερη έννοια, είτε γενικώς στη Θεωρία κατηγοριών, όπως παραδείγματος χάρη στην κατηγορική θεωρία των Τόπων. Αντιθέτως, ο όρος *κατηγοριακός* αναφέρεται αποκλειστικά στη σύνδεση της γλωσσολογίας με τη Θεωρία Κατηγοριών, γέννημα της οποίας είναι οι κατηγοριακές γραμματικές.

Εφόσον μιλάμε για γραμματικές, αυτό που θα επιζητούμε κάθε φορά θα είναι η γραμματικότητα. Τί είναι όμως η γραμματικότητα; Όσοι μιλούν μια γλώσσα έχουν μάλλον μια διαίσθηση έτσι ώστε να κρίνουν ποιες εκφράσεις είναι σωστές και ποιες όχι. Παραδείγματος

[1]Το απόσπασμα είναι παρμένο από το [43].

[2]Οι κατηγοριακές γραμματικές (categorial grammars) δεν πρέπει να συγχέονται με τις κατηγορικές γραμματικές (attribute gramamars) καθώς οι πρώτες σχετίζονται άμεσα με τη Θεωρία Κατηγοριών, ενώ οι δεύτερες αφορούν τις τυπικές γραμματικές (formal grammars).

[3]Στη συντακτική ανάλυση, συστατικό ονομάζεται μία λέξη ή ομάδα λέξεων που λειτουργεί ως μία αυτοτελής μονάδα εντός μιας ιεραρχημένης δομής.

χάρη, η φράση *τα φύλλα θροΐζουν* θα ήταν αποδεκτή από κάποιον του οποίου τα ελληνικά είναι η μητρική του γλώσσα, ενώ σίγουρα θα απέρριπτε τις φράσεις *φύλλα τα θροΐζουν* ή *φύλλα θροΐζουν τα*. Η γραμματικότητα μπορεί να ιδωθεί ως ένας τρόπος περιγραφής των επιτρεπτών συνδυασμών λέξεων, έτσι ώστε αυτές να σχηματίσουν ένα συνεκτικό νόημα.

Πρέπει να σημειωθεί ότι αυτή η έννοια της γραμματικότητας διαφέρει από αυτήν που προωθείται από τα λεξικά, τα βιβλία εκμάθησης μιας γλώσσας και από τους δασκάλους. Λόγου χάρη, ένα ευρέως διαδεδομένο γραμματικό λάθος που απαντάται συχνά είναι η προσαύξηση που παίρνουν στην προστακτική αορίστου του β' προσώπου ενικού τα σύνθετα ρήματα και λαμβάνουμε τους γλωσσικούς τύπους *παρήγγειλε*, *επέτρεψε*, *επέλεξε*. Προφανώς, οι τρεις αυτοί τύποι αντιστοιχούν στην οριστική αορίστου του γ' προσώπου ενικού και κάθε δάσκαλος της ελληνικής θα θεωρούσε λάθος τη χρήση αυτή στην προστακτική. Συνεπώς, εμάς μας αφορά η πρώτη θεώρηση της γραμματικότητας και αυτήν τη γραμματικότητα θα επιζητήσουμε από εδώ και πέρα.

Οι γραμματικότητα δε συνεπάγεται το νόημα. Υπάρχουν γραμματικές εκφράσεις που στερούνται νοήματος, όπως η πρόταση *η θάλασσα ξέρει κολύμπι*. Παρόλο που η έκφραση αυτή είναι εμφανώς μια αερολογία, παραμένει γραμματική. Οι γραμματικές εκφράσεις μιας γλώσσας καλούνται προτάσεις.

Η τσομσκιανή παράδοση Η διαφορά των κατηγοριακών γραμματικών από τις γραμματικές φραστικής δομής είναι ότι στις τελευταίες, οι λέξεις και οι φράσεις ταξινομούνται σύμφωνα με τις ατομικές κατηγορίες ή τους τύπους, ενώ οι πρώτες χαρακτηρίζονται από την ταξινόμηση των λέξεων και των φράσεων σε ατομικούς και σύνθετους κλασματικούς τύπους, οι οποίοι, όμως, αναφέρονται στην πληρότητα ή μη των εκφράσεων που αναπαριστούν. Επίσης, όπως προείπαμε, το λεξικό είναι αυτό που παίζει πρωταρχικό ρόλο στις κατηγοριακές γραμματικές, ενώ στις γραμματικές φραστικής δομής το βάρος της θεωρίας μετατοπίζεται στους κανόνες παραγωγής. Τη σχέση των δύο γραμματικών θα την εξετάσουμε διεξοδικότερα παρακάτω.

Ας καταδυθούμε, τώρα, στον κόσμο των κατηγοριακών γραμματικών ξεκινώντας από την αρχή: από τη Λβοφ της Πολωνίας και το σπουδαίο μαθηματικό Καζίμιερτζ Αϊντουκιέβιτς.[4,5]

2.1 Η γραμματική του Αϊντουκιέβιτς

> *Αυτό που μας αφορά ως προς το πρόβλημα αυτό [σ.σ. της συντακτικής συνοχής] είναι να διατυπώσουμε συνθήκες τέτοιες ώστε, όταν ικανοποιούνται, να επιτρέπουν σε μία ρηματική δομή αποτελούμενη από απλούς όρους που έχουν νόημα, να αποτελέσει μια έκφραση που να έχει μοναδικό νόημα (ένα νόημα, όμως, που θα συντίθεται από τα νοήματα των διακριτών όρων που θα συναπαρτίζουν την έκφραση). Μία τέτοια διάταξη των εκφράσεων αυτών διαθέτει συντακτική συνοχή.*
>
> *Kazimierz Ajdukiewicz, Περί της Συντακτικής Συνοχής, 1935*

Ο Αϊντουκιέβιτς, στη μνημειώδη δημοσίευσή του *Περί της Συντακτικής Συνοχής*,[6] ορμώμενος από το πεδίο της μαθηματικής λογικής, διατύπωσε την πρώτη κατηγοριακή γραμματική. Αφετηρία στάθηκαν οι σημασιολογικές κατηγορίες του Στάνισλαβ Λεσνιέφσκι,[7] οι

[4]Λβοφ: Η πόλη Λεόπολις ή Λεοντόπολις. Σήμερα, ανήκει στην Ουκρανία. Γενέτειρα του Αϊντουκιέβιτς.
[5]Ένα συνοπτικό πλην πλήρες χρονικό των κατηγοριακών γραμματικών έχει συντάξει ο Μόριλ [66].
[6]Πρωτότυπο [15] και μεταφρασμένο στα αγγλικά από τον Γκιτς [16].
[7]Leśniewski [54]. Για μια εκτενή περιγραφή, βλέπε επίσης [25].

οποίες πρωτοεισήχθησαν από τον Έντμουντ Χούσερλ [45]. Σύμφωνα με τον τελευταίο, οι απλοί όροι και οι σύνθετες εκφράσεις μιας γλώσσας μπορούν να διαιρεθούν σε δύο κλάσεις, έτσι ώστε, όταν δύο όροι ή εκφράσεις που ανήκουν στην ίδια κλάση αντικαταστήσουν ο ένας τον άλλο σε κάποιο κείμενο που έχει μοναδικό νόημα, το νέο κείμενο να μην αποτελεί μια διάταξη ασύνδετων λέξεων ή να μην χάνει καθ'ολοκληρία κάποιο μοναδικό του νόημα, κυρίως αναφορικά με τη σύνταξη και όχι τη σημασιολογία.[8]

Παράδειγμα 2.1.1. Έστω ότι έχουμε την πρόταση *το τρένο περνά*. Μπορούμε να αντικαταστήσουμε το *περνά* με το *σταματά*, *τρέχει* ή ακόμα και με το *σκέπτεται*. Έτσι, θα λάβουμε μια πρόταση με ένα μοναδικό νόημα, αληθή ή ψευδή. Αν όμως αντικαταστήσουμε το *περνά* με τη λέξη *αν* ή τη λέξη *κόκκινο*, τότε λαμβάνουμε μια ασύνδετη αλληλουχία λέξεων.

Ο Χούσερλ αποκάλεσε τις συγκεκριμένες αυτές κλάσεις σημασιολογικές κατηγορίες.[9] Ο Αϊντουκιέβιτς διέκρινε δύο τέτοιες κατηγορίες: τις **βασικές** και τις **συναρτητικές**. Ουσιαστικά, η διάκριση έγινε βάσει τις θεωρίας του Φρέγκε περί συνάρτησης και περί της πληρότητας ή μη μιας πρότασης [37]. Η έννοια της συνάρτησης, όπως την όρισε ο Φρέγκε, έχει σημαίνοντα ρόλο στην τυπική ανάλυση της φυσικής γλώσσας και ειδικά στη θεμελίωση των κατηγοριακών γραμματικών. Η θεωρία συναρτήσεων του Φρέγκε, η οποία συνδέεται στενά με τις ενοράσεις του Χούσερλ περί νοήματος και γλώσσας, θα μπορούσε να συνοψισθεί στις εξής αρχές:

(i) Υπάρχουν μέρη του λόγου που είναι ημιτελή.

(ii) Αυτά τα μέρη του λόγου αντιστοιχούν σε συναρτήσεις που μπορούν να αναπαρασταθούν από κατηγορίες συναρτητών.

(iii) Η γλωσσική συρραφή είναι το αποτέλεσμα του συνδυασμού συναρτητικών κατηγοριών με τα ορίσματά τους, ώστε να παραχθούν πλήρεις εκφράσεις.

Ο Αϊντουκιέβιτς, ορμώμενος από τη θεωρία του Λεσνιέφσκι, όρισε δύο βασικές κατηγορίες: τα **ονόματα** και τις **προτάσεις**, συμβολίζοντας την καθεμία αντίστοιχα ως n (από τη γερμανική λέξη Name που σημαίνει όνομα) και s (από τη λέξη Satz που σημαίνει πρόταση με τη μαθηματική έννοια) και ονομάζοντάς τες **δείκτες**.[10] Αυτοί οι δείκτες αντιστοιχούν στους τύπους της Θεωρίας Τύπων του Ράσελ [77]. Συνεπώς, οποιεσδήποτε δύο προτάσεις ανήκουν στην ίδια σημασιολογική κατηγορία. Οι υπόλοιπες κατηγορίες που δεν είναι βασικές, είναι οι συναρτητικές. Είναι αξιοσημείωτο πως δεν υποχρεούμεθα να περιοριστούμε στον αριθμό των κατηγοριών, τόσο των βασικών όσο και των συναρτητικών, καθώς αυτές μπορεί να ποικίλλουν από γλώσσα σε γλώσσα.

Ας εξετάσουμε, όμως, μία απλή πρόταση. Ο Αριστοτέλης, στο έργο του *Περί Ερμηνείας*, όπου γίνεται για πρώτη φορά λόγος για τη σύνταξη μιας πρότασης, υποστηρίζει πως το απλούστερο είδος πρότασης είναι αυτή με δύο λέξεις αποτελούμενη από δύο ετερογενή μέρη: ένα όνομα και ένα ρήμα.[11]

---

[8]Σημασιολογία είναι η μελέτη του νοήματος. Η σημασιολογία είναι κλάδος της γλωσσολογίας, αλλά και της επιστήμης των υπολογιστών, καθώς και της ψυχολογίας.

[9]Οι σημασιολογικές αυτές κατηγορίες αφορούν περισσότερο το συντακτικό παρά το νόημα, συνεπώς μπορούν να ερμηνευθούν ως συντακτικές κατηγορίες [27]. Παρόλα αυτά, δεν αναφέρονται αποκλειστικά στο συντακτικό, αλλά και στη σημασιολογία, όπως θα δούμε παρακάτω.

[10]Από το λατινικό index, το οποίο μεταφράζεται στα ελληνικά ως δείκτης.

[11][Ἔ]σται πᾶσα κατάφασις ἢ ἐξ ὀνόματος καὶ ῥήματος ἢ ἐξ ἀορίστου ὀνόματος καὶ ῥήματος (Αριστοτέλους, Περί Ερμηνείας, 19b [8]).

Παράδειγμα 2.1.2. Έστω, λοιπόν, η πρόταση *Σωκράτης πέτεται.*[12] Η λέξη Σωκράτης ανήκει στη βασική κατηγορία n, αυτή των ονομάτων. Η λέξη πέτεται (από το ρήμα πέτομαι, δηλαδή ίπταμαι) ανήκει στη συναρτητική κατηγορία s/n, αφού αποτελεί ημιτελή έκφραση και χρειάζεται κάποιο όνομα, ως υποκείμενο, ώστε να ολοκληρωθεί.

$$\begin{array}{cc} \text{Σωκράτης} & \text{πέτεται} \\ n & s/n \\ \diagdown & \diagup \\ \multicolumn{2}{c}{s} \end{array}$$

Ο συναρτητής s/n δέχθηκε ένα όνομα κατηγορίας n ως όρισμα και επέστρεψε μια έκφραση κατηγορίας s. Ο τρόπος που δημιουργήθηκε η κατηγορία s/n ακολουθεί τη θεωρία του Φρέγκε, καθώς οι συναρτήσεις (εδώ συναρτητές) αυξανόμενου βαθμού λαμβάνονται από πλήρη αντικείμενα, όπως είναι τα ονόματα και οι προτάσεις, με την απαλοιφή κάποιου πλήρους αντικειμένου που αποτελεί μέρος αυτών. Κατ'αυτόν τον τρόπο πριν, απαλείψαμε το όνομα από μια πρόταση έτσι ώστε να λάβουμε τη συναρτητική κατηγορία του αμετάβατου ρήματος.

Ο φορμαλισμός αυτός, λοιπόν, για τις συναρτητικές κατηγορίες, δηλαδή τις ημιτελείς, είναι αυτός του κλάσματος. Στον αριθμητή βρίσκεται η σημασιολογική κατηγορία που θα προκύψει, αφού ο συγκεκριμένος τύπος συνδυαστεί με την κατηγορία που βρίσκεται στον παρανομαστή, όπως είδαμε στο προηγούμενο παράδειγμα. Επίσης, ένας συναρτητής μπορεί να έχει δύο ορίσματα, δηλαδή να είναι της μορφής $s/(nn)$. Αν θεωρήσουμε τη φράση *πήρα κάποιον τηλέφωνο* τότε η λέξη *πήρα* είναι αυτής της μορφής. Ας δούμε, όμως, ένα πιο σύνθετο παράδειγμα.

Παράδειγμα 2.1.3. Χάριν απλότητας, θα θεωρήσουμε ως ενιαίο τύπο τα έναρθρα ουσιαστικά.[13]

Ο ήλιος	κοιμάται	πολύ	βαριά	και	τα άστρα	φέγγουν
n	s/n	$\frac{\frac{s/n}{s/n}}{\frac{s/n}{s/n}}$	$\frac{s/n}{s/n}$	$\frac{s}{ss}$	n	s/n

Για να αναλύσουμε την παραπάνω πρόταση θα εισαγάγουμε πρώτα κάποιες απαραίτητες έννοιες.

Σε κάθε σύνθετη έκφραση υπάρχει ο **κύριος συναρτητής**, ενώ τα υπόλοιπα γραμματικά συστατικά θεωρούνται ορίσματά του. Εδώ, αυτός είναι η λέξη *και*, κατηγορίας s/ss και χρειάζεται δύο προτάσεις (παρανομαστής) για να παράξει μία πρόταση (αριθμητής). Αν μια σύνθετη πρόταση μπορεί να αναλυθεί στον κύριο συναρτητή της και στα ορίσματά του, τότε λέμε πως είναι **καλοσχηματισμένη**. Ο κύριος συναρτητής μιας έκφρασης, μαζί με τα ορίσματά του, αποτελούν τα πρωτοτάξια μέλη της έκφρασης. Αν αυτά είναι απλοί όροι ή σύνθετες εκφράσεις, τότε είναι προφανώς καλοσχηματισμένες εκφράσεις. Εάν αναλύσουμε αυτά τα μέλη περαιτέρω και συνεχίσουμε τη διαδικασία αυτή, αν

[12]Η συγκεκριμένη πρόταση αποτελεί το θεμελιώδες παράδειγμα στην εργασία του Γκιτς [38]. Η φράση απαντάται στο έργο *Πλατωνικά Ζητήματα* του Πλουτάρχου [7], όπου σχολιάζεται η έννοια της πρότασης βάσει του έργου των *παλαιῶν*, δηλαδή του Αριστοτέλη.

[13]Μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε πως αν τα ονόματα ανήκουν στην κατηγορία n, τότε τα άρθρα ανήκουν στην κατηγορία n/n. Συνεπώς, ο συνδυασμός τους επιστρέφει n. Βέβαια, και πάλι, οφείλουμε να μετέλθουμε μια πιο εκλεπτυσμένη μέθοδο ανάθεσης κατηγοριών σε λέξεις, κάτι το οποίο θα επιχειρήσουμε στα επόμενα κεφάλαια.

καταλήξουμε σε κάποιου βαθμού καλοσχηματισμένη έκφραση, τότε λέμε πως η έκφραση είναι **καθ'ολοκληρίαν καλοσχηματισμένη**. Για να αναλύσουμε μια έκφραση θα πρέπει να συντάξουμε την **ορθή σειρά των δεικτών** της. Στη συνέχεια, με συνεχείς **παραγωγές** (Ableitung) θα φτάσουμε στον **εκθέτη** της. Για το σύνθετο παράδειγμά μας έχουμε λοιπόν:

$$\begin{array}{lllllll l}
\frac{s}{ss} & \frac{\frac{s/n}{s/n}}{\frac{s/n}{s/n}} & \frac{s/n}{s/n} & s/n & n & s/n & n & \text{ορθή σειρά των δεικτών} \\
\frac{s}{ss} & \frac{s/n}{s/n} & s/n & n & s/n & n & & \text{α' παραγωγή} \\
\frac{s}{ss} & s/n & n & s/n & n & & & \text{β' παραγωγή} \\
\frac{s}{ss} & s & s/n & n & & & & \text{γ' παραγωγή} \\
\frac{s}{ss} & s & s & & & & & \text{δ' παραγωγή} \\
s & & & & & & & \text{τελική παραγωγή ή } \textbf{εκθέτης}
\end{array}$$

Οπότε, ο ορισμός της συντακτικής συνοχής προκύπτει ως εξής:

Ορισμός 2.1.4. Μια έκφραση έχει **συντακτική συνοχή** εάν

1. είναι καθ'ολοκληρίαν καλοσχηματισμένη

2. κάθε κύριος συναρτητής αυτής, οποιασδήποτε τάξης, έχει συσχετιστεί με τόσα ορίσματα όσα επιβάλλει ο παρανομαστής του

3. έχει εκθέτη έναν απλό δείκτη.

Άρα, η σύνθετη έκφραση του παραδείγματος 2.1.3 έχει συντακτική συνοχή.

Είμαστε σε θέση, πλέον, να ορίσουμε την κατηγοριακή γραμματική. Ο συγκεκριμένος ορισμός δίνεται μόνο για να έχουμε μία εικόνα του τι πραγματευόμαστε και για να αποσαφηνίσουμε τον όρο.

Ορισμός 2.1.5. Μία **κατηγοριακή γραμματική** *μιας γλώσσας* L *αποτελείται από πέντε στοιχεία:*

1. Ένα **λεξιλόγιο** V, το οποίο περιέχει όλες τις λέξεις της γλώσσας L.

2. Ένα σύνολο **βασικών** ή **ατομικών κατηγοριών** $\mathcal{C}_b$, όπου εμφανίζεται το ειδικό στοιχείο s (για την πρόταση).

3. **Κανόνες σχηματισμού κατηγοριών** R_t, οι οποίοι καθορίζουν τον τρόπο με τον οποίο σύνθετες, δηλαδή συναρτητικές, κατηγορίες παράγονται από βασικές.

4. Μία **λεξικολογική συνάρτηση** F, η οποία αντιστοιχίζει μία ή περισσότερες κατηγορίες σε κάθε λέξη του λεξιλογίου.

5. Ένα **συντακτικό** Z, αποτελούμενο από κανόνες που καταδεικνύουν τον τρόπο με τον οποίο μια ακολουθία εκφράσεων αναγνωρίζεται ως σύνθετη καλοσχηματισμένη έκφραση και τι κατηγορίας είναι η τελευταία.

Αργότερα, θα δούμε πώς αυτός ο ορισμός θα αποκτήσει περαιτέρω χαρακτηριστικά που θα τον μετουσιώσουν τόσο τυπικά όσο και ουσιαστικά.

Παρατήρηση Ένα ιδιαίτερο χαρακτηριστικό της γραμματικής του Αϊντουκιέβιτς που συνεχίζει να υπάρχει και στις μεταγενέστερες γραμματικές είναι ότι σε μία λέξη μπορούν να αποδοθούν πολλοί τύποι. Παραδείγματος χάρη, η λέξη *και* μπορεί να είναι είτε τύπου s/ss, όπως είδαμε πρωτύτερα, είτε n/nn, αν θεωρήσουμε την πρόταση

Ο Γιάννης	και	ο Χρήστος	παίζουν	σκάκι.
n	$\frac{n}{nn}$	n	$\frac{s}{nn}$	n

Αυτό το πρόβλημα λύνεται είτε εποπτικά, αν η συντακτική ανάλυση έχει ανατεθεί σε κάποιον άνθρωπο, είτε πιθανοκρατικά αν μεσολαβεί κάποιος υπολογιστής.[14]

2.2 Η γραμματική ΑΒ

> *Η ειδοποιός διαφορά μεταξύ αυτής της μεθόδου [σ.σ. των κατηγοριακών γραμματικών] και αυτών που δεσπόζουν σήμερα έγκειται στο γεγονός ότι το μόνο που απαιτείται, εκτός του πίνακα όπου κάθε γλωσσικό στοιχείο (συνήθως κάθε λέξη) απεικονίζεται σε μία ή περισσότερες κατηγορίες, είναι ένας απλός κανόνας οιονεί αριθμητικού χαρακτήρα, ο οποίος μας επιτρέπει να «υπολογίσουμε» το συντακτικό χαρακτήρα οποιασδήποτε γλωσσικής διαδοχής στοιχείων (ακολουθία ενός ή περισσότερων στοιχείων) εντός των συμφραζομένων αυτής.*
>
> *Y. Bar-Hillel, Ένας οιονεί αριθμητικός συμβολισμός για την περιγραφή του συντακτικού, 1953*

Ένα από τα κυριότερα ζητήματα που προκάλεσε την ανάγκη αναθεώρησης της γραμματικής του Αϊντουκιέβιτς ήταν η γραμματικότητα και η αδυναμία διαχωρισμού των γραμματικών εκφράσεων από τις μη γραμματικές. Παραδείγματος χάρη, ενώ σε μια έκφραση όπως *το πλοίο πλέει* θα αποδιδόταν ο τύπος s, ο ίδιος θα αποδιδόταν και στην έκφραση *πλοίο το πλέει*, η οποία προφανώς δεν έχει συντακτική συνοχή.

Ο Μπαρ-Χιλλέλ [19] διατυπώνοντας μια νέα θεωρία, αργότερα γνωστή ως γραμματική Αϊντουκιέβιτς-Μπαρ-Χιλλέλ ή, απλούστερα, γραμματική ΑΒ, προσπάθησε να δώσει λύση στο πρόβλημα αυτό. Έτσι, εισήγαγε την έννοια της κατεύθυνσης. Σύμφωνα με τη νέα γραμματική, υπάρχει διαφορά μεταξύ μιας λέξης ή φράσης που ανήκει σε μια συναρτητική κατηγορία και πρέπει να δεχθεί ένα όρισμα από τα δεξιά και μιας άλλης λέξης ή φράσης που ανήκει πάλι σε μια συναρτητική κατηγορία και πρέπει να δεχθεί ένα όρισμα από τα αριστερά.

Οπότε, στο παράδειγμά μας, η λέξη *το* ανήκει στην κατηγορία n/n, αφού δέχεται ένα όρισμα από τα δεξιά, η λέξη *πλοίο* στην n, ως όνομα, και η λέξη *πλέει* στην $n\backslash s$, αφού χρειάζεται ένα όρισμα από τα αριστερά.[15]

Παράδειγμα 2.2.1. Ας δούμε όμως ένα πιο σύνθετο παράδειγμα για να καταλάβουμε τη σημασία της παραπάνω καινοτομίας: έστω η πρόταση *ο Γιάννης πιστεύει ότι η Μαρία είναι όμορφη*. Βρίσκουμε σε ποια κατηγορία ανήκει κάθε λέξη

Ο Γιάννης	πιστεύει	ότι	η Μαρία	είναι	όμορφη
n	$(n\backslash s)/n$	n/s	n	$(n\backslash s)/n$	n

και προχωράμε στη συντακτική ανάλυση της πρότασης:

[14] Μια αναλυτική έρευνα για το πώς θα μπορούσε να πραγματοποιηθεί αυτή η πιθανοκρατική συντακτική ανάλυση βρίσκεται στο [88]. Στο τέταρτο κεφάλαιο θα αναλυθεί εκτενέστερα το θέμα αυτό.

[15] Ο Μπαρ-Χιλλέλ χρησιμοποίησε ένα συμβολισμό που δεν ακολουθείται πια: $n/[n]$ για τις κατηγορίες που δέχονται όρισμα από τα δεξιά και $n/(n)$ για αυτές που δέχονται όρισμα από τα αριστερά. Παρόλο που ο συμβολισμός αυτός εξέλειψε, η συγκεκριμένη διάκριση απέβη καθοριστική για την εξέλιξη των κατηγοριακών γραμματικών.

n	$(n\backslash s)/n$	n/s	n	$(n\backslash s)/n$	n	
n	$(n\backslash s)/n$	n/s	n	$(n\backslash s)$		α' παραγωγή
n	$(n\backslash s)/n$	n/s	s			β' παραγωγή
n	$(n\backslash s)/n$	n				γ' παραγωγή
n	$(n\backslash s)$					δ' παραγωγή
s						εκθέτης

Αυτή η καινοτομία είχε μία άλλη σημαντική απότοκο. Έπαψε να υπάρχει η ανάγκη αναδιάταξης των στοιχείων μιας έκφρασης ώστε να σχηματιστεί η ορθή σειρά των δεικτών, δηλαδή η συντακτική ανάλυση θα ξεκινούσε με την παρουσίαση του κειμένου, μετά την ολοκλήρωση της αντιστοίχισης των λέξεων σε κατηγορίες. Αυτό το γεγονός ενέτεινε ακόμα περισσότερο το λεξικισμό[16] στον τομέα των κατηγοριακών γραμματικών.

Η ορολογία του Μπαρ-Χιλλέλ, λόγω των τσομσκιανών καταβολών του, ήταν εντελώς διαφορετική από αυτή του Αϊντουκιέβιτς και μπορεί να θεωρηθεί ακόμα και παραπλανητική, αφού αντί του συναρτητή, ο πρώτος χρησιμοποίησε τον όρο τελεστής και αντί της παραγωγής τη λέξη παράγωγος, η οποία βέβαια αφορά την έννοια του λογισμού, έννοια που εισήγαγε εκείνος για πρώτη φορά. Με την έννοια του λογισμού έδωσε το έναυσμα για μια πιο εφαρμοσμένη, κατά κάποιον τρόπο, νοοτροπία που αφορά όχι τόσο το τι σημαίνουν οι κατηγοριακές γραμματικές, αλλά το τι μπορούμε να κάνουμε με αυτές.

Οπότε, τώρα, αν θέλουμε να ορίσουμε τη γραμματική AB θα προχωρήσουμε ως εξής, ακολουθώντας τον ορισμό 2.1.5.

Ορισμός 2.2.2. Η **γραμματική AB** είναι μια πεντάδα $\langle V, C_b, R_t, F, Z_{AB}\rangle$, όπου V, C_b είναι ίδια με αυτά της γραμματικής του Αϊντουκιέβιτς, ενώ για τα τρία τελευταία έχουμε ότι:

R_t

R_1: Αν a, b κατηγορίες, τότε $a\backslash b$ κατηγορία.
R_2: Αν a, b κατηγορίες, τότε a/b κατηγορία.

Z_{AB}

1: $a, a\backslash b \rightsquigarrow b$
2: $b/a, a \rightsquigarrow b$

Προφανώς, η συνάρτηση F της γραμματικής AB είναι διαφορετική από αυτήν του Αϊντουκιέβιτς, αφού έχουμε δύο τρόπους σχηματισμού νέων κατηγοριών.

Με τη προσπάθεια αυτή του Μπαρ-Χιλλέλ, οι κατηγοριακές γραμματικές απέκτησαν νέο ενδιαφέρον, διότι διατυπώθηκε ένας καλύτερος τρόπος υπολογισμού της συντακτικής συνοχής μιας πρότασης. Οι γραμματικές AB είναι πια γνωστές ως **βασικές** ή **κλασικές** ή **καθαρές κατηγοριακές γραμματικές** και θεωρούνται οι απλούστερες στη βιβλιογραφία.

2.3 Έννοιες της λογικής

Στην παρούσα ενότητα παρουσιάζονται μερικές έννοιες της μαθηματικής λογικής. Για λόγους που θα φανούν παρακάτω, θα αναφερόμαστε στη **διασθητική** (ιντουϊσιονιστική) **λογική**, η οποία διαφοροποιείται από την κλασική λογική σε μερικά βασικά σημεία.

[16]Κύρια ιδέα του λεξικισμού είναι ότι όλη η πληροφορία που αφορά τη σύνταξη περιέχεται στο λεξικό της υπό μελέτη γλώσσας.

Διαισθητική λογική Η διαισθητική λογική, γνωστή και ως κατασκευαστική λογική, διαφέρει θεμελιωδώς από την κλασική. Η έννοια γύρω από την οποία περιστρέφεται δεν είναι η αλήθεια, όπως στην κλασική λογική, αλλά η απόδειξη, γι'αυτό και λέγεται κατασκευαστική. Αντιθέτως, η κλασική λογική δεν κατασκευάζει, αλλά ανακαλύπτει μία προϋπάρχουσα αλήθεια. Ας δούμε, συνοπτικά, τις διαφορές των δύο λογικών.

- Η **κλασική λογική** βασίζεται στην έννοια της **αλήθειας**.
  - Η αλήθεια μιας πρότασης είναι *απόλυτη*: οι προτάσεις είναι είτε αληθείς είτε ψευδείς.
  - Η έννοια ψευδής ταυτίζεται με αυτήν της μη αληθούς.
  - Η πρόταση $\phi \vee \neg\phi$ πρέπει να ισχύει ανεξαρτήτως του νοήματος της ϕ.
  - Η πληροφορία την οποία ενέχει η $\phi \vee \neg\phi$ είναι αρκετά περιορισμένη.
  - Οι αποδείξεις, όπου χρησιμοποιείται η αρχή του αποκλειόμενου τρίτου, $\phi \vee \neg\phi$ ή ο νόμος διπλής άρνησης, δεν είναι κατασκευαστικές.
- Η **διαισθητική λογική** βασίζεται στην έννοια της **απόδειξης**. Επίσης, αντικαθίσταται το αξιωματικό σχήμα $\neg\neg F \vdash F$ με το $\neg F \vdash (F \vdash G)$.
  - Απορρίπτει την ηγετική αρχή της «απόλυτης» αλήθειας.
  - Η ϕ είναι «αληθής» αν μπορούμε να την αποδείξουμε.
  - Η ϕ είναι «ψευδής» αν μπορούμε να δείξουμε ότι δοθείσης μιας απόδειξης της ϕ καταλήγουμε σε άτοπο.
  - Για να δείξουμε ότι $\phi \vee \neg\phi$ πρέπει να δείξουμε είτε ότι ϕ είτε ότι $\neg\phi$. Αν τίποτα από τα δύο δεν μπορεί να αποδειχθεί, τότε η υποτιθέμενη αλήθεια της διάζευξης δεν αιτιολογείται καθόλου.
  - Στο συμπέρασμα, δηλαδή μετά την μπάρα[17] ($\vdash$), μπορεί να υπάρχει μόνο μία φόρμουλα.

Υπάρχουν τρεις τρόποι σχηματισμού αποδεικτικών θεωριών για τη λογική: το αξιωματικό σύστημα, ο φυσικός συμπερασμός και ο ακολουθητικός λογισμός. Εδώ, θα εστιάσουμε στους δύο τελευταίους.

Σημείωση Πριν προχωρήσουμε, οφείλουμε να σημειώσουμε ότι, προς αποφυγή συγχύσεων, για την απόδοση του αγγλικού όρου *formula* θα χρησιμοποιούμε την απλή μεταγραφή *φόρμουλα*. Η λέξη *τύπος*, η οποία χρησιμοποιείται σε πολλά ελληνικά εγχειρίδια λογικής για την απόδοση της συγκεκριμένης λέξης, αν και ακριβής, είναι ήδη δεσμευμένη από τις κατηγοριακές γραμματικές στην παρούσα εργασία. Συνεπώς, ο λόγος υιοθέτησης αυτής της απόδοσης είναι καθαρά πρακτικός.

2.3.1 Φυσικός συμπερασμός

Ο φυσικός συμπερασμός εφευρέθηκε από τον Γκέντζεν [39] και μελετήθηκε περαιτέρω από τον Prawitz [71]. Σε αντίθεση με το αξιωματικό σύστημα, το οποίο χαρακτηρίζεται από λίγους συμπερασματικούς κανόνες και πολλά αξιώματα, το σύστημα αυτό του Γκέντζεν έχει μόνο ένα αξίωμα και πολλούς συμπερασματικούς κανόνες.

[17] Υιοθετούμε τη λέξη *μπάρα* από την αγγλική βιβλιογραφία. Το σύμβολο $\vdash$ ερμηνεύεται ως «συνεπάγεται ότι» ή «συμπεραίνουμε ότι» και αφορά τη λογική διαδικασία της μετάβασης από κάποια προκείμενη σε κάποιο συμπέρασμα.

Η βασική ιδέα του φυσικού συμπερασμού είναι μια ασυμμετρία: μία απόδειξη είναι μία αδρά δενδροειδής δομή με μία ή περισσότερες υποθέσεις (ενδέχεται και καμία), αλλά με μόνο ένα συμπέρασμα. Ο φυσικός συμπερασμός δημιουργήθηκε αρχικά για να αντικατοπτρίσει την τυπική πρακτική της διεκπεραίωσης λογικών αποδείξεων. Χαρακτηρίζεται από δύο συλλογιστικούς κανόνες για τους λογικούς συνδέσμους: έναν κανόνα **εισαγωγής** που υποδεικνύει πώς εισάγεται ένας σύνδεσμος σε μία παραγωγή και έναν κανόνα **απαλοιφής** που υποδεικνύει πώς αφαιρείται ένας σύνδεσμος από μια παραγωγή. Αυτοί οι κανόνες συμβάλλουν σε μία διαισθητική κατανόηση του νοήματος και της χρήσης των συνδέσμων που ορίζουν.

Η απλούστερη μορφή μιας απόδειξης στο πλαίσιο του φυσικού συμπερασμού περιλαμβάνει τις υποθέσεις ή προκείμενες, το συμπέρασμα και μία οριζόντια γραμμή που χωρίζει αυτά τα δύο, ο λεγόμενος modus ponens.[18]

Στον πίνακα 2.1 βλέπουμε το αποδεικτικό σύστημα του φυσικού συμπερασμού για τη διαισθητική προτασιακή λογική. Οι σύνδεσμοι είναι η γραμμική συνεπαγωγή $\to$, η σύζευξη $\wedge$ και η διάζευξη $\vee$. Το σύμβολο $\bot$ συμβολίζει το ψεύδος και αφορά την άρνηση μιας πρότασης A, δηλαδή

$$\neg A \equiv A \to \bot$$

Η σταθερά $\bot$ είναι η μονάδα της διάζευξης. Δηλαδή

$$A \vee \bot \equiv A$$

Υπάρχει επίσης άλλη μια μονάδα, η $\top$ για τη σύζευξη. Δηλαδή

$$A \wedge \top \equiv A$$

Αυτές τις μονάδες μπορούμε να τις σκεφτούμε ως το 0 και το 1 της αριθμητικής, όπου $n + 0 = n$ και $n \times 1 = n$.

Εισαγωγή

$$\dfrac{\begin{array}{c}[A]^i\\ \vdots\\ B\end{array}}{A \to B}\to_{\mathcal{I},i}$$

$$\dfrac{A \qquad B}{A \wedge B}\wedge_{\mathcal{I}}$$

$$\dfrac{A}{A \vee B}\vee_{\mathcal{I}} \qquad \dfrac{A}{B \vee A}\vee_{\mathcal{I}}$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}[A]^i\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\neg A}\neg_{\mathcal{I},i}$$

$$\dfrac{\bot}{A}\bot_{\varepsilon}$$

Απαλοιφή

$$\dfrac{A \qquad A \to B}{B}\to_{\varepsilon}$$

$$\dfrac{A \wedge B}{A}\wedge_{\varepsilon} \qquad \dfrac{A \wedge B}{B}\wedge_{\varepsilon}$$

$$\dfrac{A \vee B \qquad \begin{array}{c}[A]^i\\ \vdots\\ C\end{array} \qquad \begin{array}{c}[B]^j\\ \vdots\\ C\end{array}}{C}\vee_{\varepsilon_{i,j}}$$

$$\dfrac{A \qquad \neg A}{\bot}\neg_{\varepsilon}$$

Πίνακας 2.1: Παρουσίαση κατά Prawitz: Ο φυσικός συμπερασμός για τη διαισθητική προτασιακή λογική

Οι τελείες που χρησιμοποιούνται υποδηλώνουν τα ενδιάμεσα στάδια προτού φτάσουμε από το A στο B. Οι υποθέσεις εντός αγκυλών είναι αυτές που έχουν χρησιμοποιηθεί για

[18] Η φράση είναι λατινική και μεταφράζεται ως η *μέθοδος που βεβαιώνει.*

να παράξουν κάποιο συμπέρασμα και ο εκθέτης τους δείχνει σε ποιο στάδιο της απόδειξης συνέβη αυτό. Μετά το συγκεκριμένο στάδιο, η εκάστοτε υπόθεση δεν είναι διαθέσιμη.

Τέλος, η τελευταία σχέση του αποδεικτικού συστήματος, προκύπτει από την αντικατάσταση του αξιώματος του αποκλειόμενου τρίτου στην κλασική λογική, κάτι που δεν ισχύει στη διαισθητική λογική.

Πριν περάσουμε στον ακολουθητικό λογισμό, παρατηρούμε πως αν θεωρήσουμε ότι οι παραγωγές του φυσικού συμπερασμού είναι δέντρα της μορφής

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \dots & A_n \\ & \vdots & \\ & B & \end{array}$$

τότε αυτά είναι δυνατόν να συντομευθούν ως

$$A_1, \dots, A_n \vdash B$$

ή, γενικότερα, ως

$$\Gamma \vdash B$$

όπου Γ σύνολο υποθέσεων-προκειμένων.

2.3.2 Ακολουθητικός λογισμός

Ο ακολουθητικός λογισμός είναι ένα αποδεικτικό σύστημα, το οποίο διατυπώθηκε, και αυτό, από τον Γκέντζεν [39]. Διαβαθμίζεται σε τρία επίπεδα: σε αυτό των φορμουλών, των ακολουθητών και των αποδείξεων. Οι φόρμουλες σχηματίζονται από τα προτασιακά σύμβολα, τα οποία συμβολίζονται με μικρά γράμματα $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ και με τη βοήθεια των συνδέσμων της λογικής $\wedge, \vee$. Η ισότητα μεταξύ δύο φορμουλών αναφέρεται στην ισότητα μεταξύ ακολουθιών συμβόλων. Παραδείγματος χάρη, θεωρούνται διαφορετικές οι φόρμουλες $(a \vee b) \vee c$ και $a \vee (b \vee c)$, ακόμα κι αν επιτρέπουμε την προσεταιριστικότητα του $\vee$.

Η τυπογραφική σύμβαση για το σύστημα αυτό είναι η εξής: χρησιμοποιούμε κεφαλαία λατινικά γράμματα, $A, B, C, \dots$, για τις φόρμουλες και κεφαλαία ελληνικά γράμματα, $\Gamma, \Delta, \Theta, \dots$, για τις πεπερασμένες ακολουθίες φορμουλών, πιθανώς κενών.

Ορισμός 2.3.1. Έστω Γ, Δ πεπερασμένες ακολουθίες φορμουλών με $\Gamma = A_1, \dots, A_i$ και $\Delta = B_1, \dots, B_j$ με $i \leq j < \infty$. Ένας **ακολουθητής**[19] είναι μία έκφραση της μορφής

$$\Gamma \vdash \Delta$$

όπου

$$A_1, \dots, A_i \vdash B_1, \dots, B_j$$

σηματοδοτεί ότι: αν ισχύει η *σύζευξη* $A_1, \dots, A_i$, τότε ισχύει η διάζευξη $B_1, \dots, B_j$. Αυτό σημαίνει ότι τα κόμματα έχουν διαφορετική σημασία ανάλογα με τη μεριά στην οποία βρίσκονται. Αριστερά έχουμε συζεύξεις, δεξιά έχουμε διαζεύξεις. Με άλλα λόγια, ένας ακολουθητής $\Gamma \vdash \Delta$ σημαίνει ότι αν κάθε στοιχείο του Γ ισχύει, τότε ισχύει τουλάχιστον ένα

[19] Αποδίδουμε τη λέξη sequent, η οποία προέρχεται από τη γερμανική Sequenz πρωτοδιατυπωμένη από τον Γκέντζεν, ως ακολουθητής. Αποφεύγουμε τη λέξη ακολουθητικό, καθαρά για πρακτικούς λόγους, αφού η τελευταία αποτελεί (ουσιαστικοποιημένο) επίθετο της ελληνικής και, έτσι, χάνεται η διάκριση μεταξύ των δύο μερών του λόγου, διάκριση την οποία θέλουμε να διατηρήσουμε για λόγους σαφήνειας των προσεχών διατυπώσεων.

από τα στοιχεία του Δ. Ενίοτε, για λόγους που αφορούν την περιγραφόμενη λογική, τα Γ, Δ συμβολίζουν πολυσύνολα[20] φορμουλών.

Όπως και στο φυσικό συμπερασμό, οι ακολουθητικοί κανόνες για τους συνδέσμους εμφανίζονται ως ζεύγη. Εδώ, όμως, τα ζεύγη εισάγουν τους συνδέσμους είτε στην **αριστερή** είτε στη **δεξιά** μεριά της μπάρας. Επίσης, ένας βασικός περιορισμός του ακολουθητικού λογισμού για τη διαισθητική προτασιακή λογική είναι ότι αν $\Gamma \vdash \Delta$ ακολουθητής, τότε υποχρεωτικά η ακολουθία Δ αποτελείται από **το πολύ** μία φόρμουλα.

Αποδείξεις Οι αποδείξεις κυβερνώνται από ένα λογισμό, στην περίπτωσή μας τον ακολουθητικό, ο οποίος τις ορίζει επαγωγικά. Αυτές είναι δένδρα ακολουθητών, των οποίων τα φύλλα είναι είτε συγκεκριμένοι ακολουθητές ονομαζόμενοι υποθέσεις είτε αξιώματα και τα κλαδιά αντιστοιχούν στην εφαρμογή των κανόνων.

- Οι κανόνες (συνήθως μονομελείς ή διμελείς) απεικονίζονται ως εξής:

$$\frac{\text{(προκείμενη:) } \Gamma \vdash \Gamma'}{\text{(συμπέρασμα:) } \Theta \vdash \Theta'} \text{ όνομα κανόνα}$$

$$\frac{\text{(προκείμενες:) } \Gamma \vdash \Gamma' \qquad \Delta \vdash \Delta'}{\text{(συμπέρασμα:) } \Theta \vdash \Theta'} \text{ όνομα κανόνα}$$

- Τα αξιώματα συμβολίζονται ως εξής:

$$\frac{}{\Gamma \vdash \Gamma'} \text{ όνομα αξιώματος}$$

- Οι υποθέσεις είναι απλώς συγκεκριμένοι ακολουθητές.

- Η ρίζα του δένδρου λέγεται **ακολουθητής συμπεράσματος**.

$$\frac{\vdots}{\Gamma \vdash \Gamma'} \text{ όνομα του τελικώς χρησιμοποιημένου κανόνα}$$

Μία απόδειξη γίνεται κατανοητή με τον ακόλουθο τρόπο: *από ακολουθητές υποθέσεων καταλήγουμε στον ακολουθητή συμπεράσματος*. Εάν υπάρχει μία απόδειξη άνευ υπόθεσης για έναν ακολουθητή, έστω s εντός ενός λογισμού SC, τότε λέμε πως ο ακολουθητής είναι αποδείξιμος και ισχύει $s \in SC$. Ειδικότερα, μία ταυτολογία είναι μία φόρμουλα F τέτοια ώστε $(\vdash F) \in SC$.

Παρακάτω (πίνακας 2.2), βλέπουμε τον ακολουθητικό λογισμό για τη διαισθητική προτασιακή λογική.

Οι **δομικοί κανόνες** είναι αυτοί της εξασθένισης, της συστολής και της ανταλλαγής.[21] Ο κανόνας της ανταλλαγής δεν είναι απαραίτητος, αν θεωρήσουμε τα Γ, Δ πολυσύνολα. Ας δούμε, όμως, αναλυτικά τους συνδέσμους και το νόημά τους.

[20] Η έννοια του πολυσυνόλου αποτελεί γενίκευση αυτής του συνόλου και πρόκειται για σύνολο του οποίου τα στοιχεία επιτρέπεται να εμφανίζονται περισσότερες από μία φορές.

[21] **W**eakening - **C**ontraction - **E**xchange

Αξίωμα και τομή

$$\frac{}{A \vdash A}\,\text{αξίωμα} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A \qquad A, \Delta \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash B}\,\text{τομή}$$

Λογικοί κανόνες

$$\frac{\Gamma, A \vdash C}{\Gamma, A \wedge B \vdash C}\wedge_{L_1} \qquad \frac{\Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \wedge B \vdash C}\wedge_{L_2} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma' \vdash B}{\Gamma, \Gamma' \vdash A \wedge B}\wedge_R$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash C \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \vee B \vdash C}\vee_L \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\vee_{R_1} \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\vee_{R_2}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad B, \Gamma' \vdash C}{\Gamma, \Gamma', A \to B \vdash C}\to_L \qquad\qquad \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}\to_R$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, \neg A \vdash}\neg_L \qquad\qquad \frac{\Gamma, A \vdash}{\Gamma \vdash \neg A}\neg_R$$

Δομικοί κανόνες

$$\frac{\Gamma \vdash C}{\Gamma, A \vdash C}\,W \qquad \frac{\Gamma, A, A \vdash C}{\Gamma, A \vdash C}\,C \qquad \frac{\Gamma, A, B, \Gamma' \vdash C}{\Gamma, B, A, \Gamma' \vdash C}\,E$$

Πίνακας 2.2: Ο ακολουθητικός λογισμός για τη διαισθητική προτασιακή λογική

Σύζευξη Ο αριστερός κανόνας της σύζευξης αποτελεί κατάλοιπο του κανόνα απαλοιφής

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\wedge_{\mathcal{L}}$$

που σημαίνει ότι αν Γ και A αποδεικνύουν το Δ τότε Γ και $A \wedge B$ θα αποδεικνύουν το Δ: απλώς απαλείφουμε τη σύζευξη του B. Ο δεξιός κανόνας είναι ένα περαιτέρω κατάλοιπο μιας εισαγωγής:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B}\wedge_{\mathcal{R}}$$

Αν το Γ αποδεικνύει το Δ ή το A και αποδεικνύει επίσης το Δ ή το B, τότε μπορούμε να συνδυάσουμε τα A, B για να συμπεράνουμε ότι το Γ αποδεικνύει το Δ ή το $A \wedge B$.

Διάζευξη Ο αριστερός κανόνας της διάζευξης είναι ανάλογος του κανόνα $\vee_\varepsilon$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\vee_{\mathcal{L}}$$

Αν Γ και A αποδεικνύουν το Δ και Γ και B αποδεικνύουν επίσης το Δ, τότε Γ και $A \vee B$ θα αποδεικνύουν το Δ, όποιο μέλος της διάζευξης κι αν λάβουμε, είτε το A είτε το B, θα μπορούμε σε κάθε περίπτωση να συνάγουμε ότι Δ.

Συνεπαγωγή Ο αριστερός κανόνας ουσιαστικά συλλαμβάνει την ουσία του *modus ponens*

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta}\to_{\mathcal{L}}$$

Έστω ότι $\Gamma \vdash \Delta, A$, το οποίο σημαίνει ότι το Γ είτε αποδεικνύει το Δ είτε αποδεικνύει το A. Αν συμβαίνει το πρώτο, τότε με εξασθένιση θα έχουμε ότι το Γ και το $A \to B$ αποδεικνύει το Δ. Έστω τώρα ότι το Γ δεν αποδεικνύει το Δ, αλλά μόνο το A. Ο δεύτερος ακολουθητής, $\Gamma, B \vdash \Delta$, λέει πως ακόμα κι αν το Γ δεν αποδεικνύει το Δ, το Γ μαζί με το B θα το αποδείξουν. Γνωρίζουμε επίσης ότι το Γ αποδεικνύει το A. Συνεπώς, αν προσθέσουμε το $A \to B$ στο Γ, τότε θα μπορούμε να δείξουμε ότι B, το οποίο μας επιτρέπει να δείξουμε το Δ.

Τομή Ο κανόνας της τομής είναι απαλείψιμος σε όλους τους καλώς συμπεριφερόμενους ακολουθητικούς λογισμούς (δηλαδή αυτούς που ικανοποιούν το θεώρημα απαλοιφής της τομής):

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma', A \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'} \text{τομή}$$

Η τομή μας δίνει έναν τρόπο να τέμνουμε ή να συγκολλούμε ξεχωριστές υπο-παραγωγές. Έστω, λοιπόν, ότι $\Gamma \vdash \Delta$. Τότε, με εξασθένιση τόσο αριστερά όσο και δεξιά, λαμβάνουμε $\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'$. Έστω, τώρα, ότι $\Gamma \vdash A$. Τότε δεδομένου ότι $\Gamma', A \vdash \Delta'$, μπορούμε να αντικαταστήσουμε το A και να βάλουμε το Γ, έτσι ώστε $\Gamma', \Gamma \vdash \Delta'$. Αυτό μπορεί να εξασθενήσει για να δώσει $\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'$. Στα συστήματα όπου ικανοποιείται η απαλοιφή της τομής, οι αποδείξεις, στις οποίες χρησιμοποιείται η τομή, μπορούν να αντικατασταθούν από συντομότερες χωρίς τη χρήση αυτής.

Είδαμε, λοιπόν, τις βασικές έννοιες της θεωρίας αποδείξεων, οι οποίες θα μας χρησιμεύσουν στα επόμενα κεφάλαια. Η κατανόησή τους κρίνεται σημαντική, καθώς τόσο ο φορμαλισμός των κατηγοριακών γραμματικών όσο και η ίδια η ουσία του βασίζεται κατά πολύ σε αυτές. Αυτά, όμως, θα φανούν διαυγέστερα σε ό,τι ακολουθεί.

2.4 Λογισμός Λάμπεκ

Η εργασία του Λάμπεκ, *Τα μαθηματικά της προτασιακής δομής* [51], αποτελεί το σημείο καμπής των κατηγοριακών γραμματικών, καθώς για πρώτη φορά διατυπώθηκε ένα ολοκληρωμένο τυπικό σύστημα λογικής για το σκοπό της συντακτικής ανάλυσης μιας φυσικής γλώσσας. Ο ίδιος ο Λάμπεκ το αποκάλεσε **συντακτικό λογισμό**, αλλά σήμερα είναι ευρέως γνωστός ως **Λογισμός Λάμπεκ** προς τιμή του και συμβολίζεται ως **L**.[22]

Βασική του ιδέα ήταν η αξιωματικοποίηση της γραμματικής AB, με την προσθήκη κάποιων επιπλέον κανόνων, στο πλαίσιο της διαισθητικής λογικής του Γκέντζεν. Επίσης, έγινε αποκλειστική αναφορά σε **συντακτικούς τύπους**, οι οποίοι αντιστοιχούν σε γενικές γραμμές στα μέρη του λόγου, και κάθε άλλη ορολογία απαλείφθηκε. Στα χνάρια των γραμματικών AB, ορίστηκαν δύο **πρωτογενείς τύποι**: αυτός των ονομάτων, n, και αυτός των προτάσεων, s. Βέβαια, τονίζεται ότι τόσο οι πρωτογενείς όσο και οι υπόλοιποι συντακτικοί τύποι ορίζονται κατά βούληση και μπορεί να είναι άπειροι τον αριθμό, αναλόγως τη γλώσσα που θέλουμε να περιγράψουμε.

Πλέον, έχουμε να κάνουμε με ένα λογικό σύστημα. Σε αυτό το σύστημα, η συντακτική ανάλυση μιας πρότασης ισοδυναμεί με τη διενέργεια μιας λογικής απόδειξης, όπου οι λέξεις της πρότασης είναι οι προκείμενες και η γραμματική οι κανόνες συμπερασμού. Το συντακτικό δέντρο της πρότασης αντιστοιχεί στο δέντρο απόδειξης της παραγωγής. Έτσι, κάθε έκφραση της γλώσσας, για να δούμε εάν είναι γραμματική ή όχι, οφείλουμε να την

[22] **L**: **L**ambek (Calculus)

αποδείξουμε: αυτή η ιδέα, αργότερα ονομάστηκε **συντακτική ανάλυση ως συμπερασμός**. Έτσι, ο συντακτικός αυτός λογισμός μπορεί να ιδωθεί ως ένα **σύστημα συμπερασμού**.

Παράδειγμα 2.4.1. Έστω ότι θέλουμε να αναλύσουμε συντακτικά την πρόταση *τα παιδιά παίζουν παιχνίδια*. Πρώτα από όλα προβαίνουμε στην αντιστοίχιση των λέξεων σε τύπους:

$$\begin{array}{cccc} \text{Τα} & \text{παιδιά} & \text{παίζουν} & \text{παιχνίδια} \\ n/n & n & n\backslash s/n & n \end{array}$$

Και προχωράμε στη συντακτική ανάλυση με τη μορφή του συμπερασμού:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{Τα}}{n/n} \quad \dfrac{\text{παιδιά}}{n}}{n} \quad \dfrac{\text{παίζουν}}{n\backslash s/n}}{s/n} \quad \dfrac{\text{παιχνίδια}}{n}}{s}$$

Η πρόταση μπορεί να «υπολογιστεί» σε μία γραμμή:

$$(n/n)n(n\backslash s/n)n \Rightarrow n(n\backslash s/n)n \Rightarrow (s/n)n \Rightarrow s$$

Ας διατυπώσουμε, τώρα, το Λογισμό Λάμπεκ, όπως παρουσιάστηκε από τον ίδιο, το 1958, ως ένας ακολουθητικός λογισμός. Υιοθετούμε τη διατύπωση του Μόορτγκατ [57], όπου η προσεταιριστικότητα του λογισμού υπονοείται.

Ορισμός 2.4.2 (Λογισμός Λάμπεκ (**L**)). Οι ακολουθητές είναι της μορφής $S \vdash \mathcal{F}$ όπου $S ::= \mathcal{F} \mid \mathcal{F}, S$. (Οι συμφραστικές μεταβλητές Γ, Γ' μπορούν να είναι κενές, ενώ Δ, Δ' είναι μη κενές)

$$\text{αξίωμα}\ \dfrac{}{A \vdash A} \qquad \dfrac{\Delta \vdash B \qquad \Gamma, B, \Gamma' \vdash A}{\Gamma, \Delta, \Gamma' \vdash A}\ \text{τομή}$$

$$[\bullet L]\ \dfrac{\Gamma, A, B, \Gamma' \vdash C}{\Gamma, A \bullet B, \Gamma' \vdash C} \qquad \dfrac{\Delta \vdash A \qquad \Delta' \vdash B}{\Delta, \Delta' \vdash A \bullet B}\ [\bullet R]$$

$$[/L]\ \dfrac{\Delta \vdash A \qquad \Gamma, B, \Gamma' \vdash C}{\Gamma, B/A, \Delta, \Gamma' \vdash C} \qquad \dfrac{\Delta, A \vdash B}{\Delta \vdash B/A}\ [/R]$$

$$[\backslash L]\ \dfrac{\Delta \vdash A \qquad \Gamma, B, \Gamma' \vdash C}{\Gamma, \Delta, A\backslash B, \Gamma' \vdash C} \qquad \dfrac{A, \Delta \vdash B}{\Delta \vdash A\backslash B}\ [\backslash R]$$

Πίνακας 2.3: Ακολουθητικός λογισμός για τον **L**

Η προσεταιριστικότητα υπονοείται, διότι θεωρούμε το S ως ακολουθία φορμουλών. Απαιτούμε, επίσης, κάθε ακολουθητής χρησιμοποιούμενος σε μια απόδειξη να έχει μία μη κενή ακολουθία φορμουλών στο μέρος των υποθέσεων. Ο λογισμός όπου απουσιάζει ο εν λόγω περιορισμός συμβολίζεται ως $\mathbf{L}_\varepsilon$.

Είναι σημαντικό και πρέπει να αναφερθεί ότι ο κανόνας της τομής συγκαταλέγεται στην ομάδα των αξιωμάτων, καθώς αντικατοπτρίζει την αυτοπάθεια και τη μεταβατικότητα της σχέσης παραγωγής. Ο ίδιος ο Λάμπεκ, στη δημοσίευσή του, απέδειξε ότι κάθε θεώρημα έχει μια απόδειξη όπου μπορεί να μη χρησιμοποιηθεί η τομή, άρα ο κανόνας αυτός δεν προσθέτει κάτι στην παραγωγική δύναμη του **L**. Το θεώρημα αυτό είναι γνωστό από τον Γκέντζεν ως θεώρημα ασθενούς κανονικοποίησης ή Hauptsatz και αναφέρεται τόσο στην κλασική όσο και στη διαισθητική λογική.

Θεώρημα 2.4.3 (Απαλοιφής της τομής για τον **L**). *Στον **L**, κάθε θεώρημα έχει μία απόδειξη όπου δε χρησιμοποιείται η τομή.*

Απόδειξη. Η απόδειξη βρίσκεται στο [51]. □

Πόρισμα 2.4.4 (Ιδιότητα υποφόρμουλας του **L**). Στον **L**, κάθε θεώρημα έχει μία απόδειξη, η οποία περιέχει μόνο τις υποφόρμουλές του.

Απόδειξη. Από το προηγούμενο θεώρημα, κάθε θεώρημα έχει μία απόδειξη ελεύθερη τομής και όλοι οι κανόνες εκτός της τομής έχουν την ιδιότητα της υποφόρμουλας. □

Πόρισμα 2.4.5 (Αποφασισιμότητα του **L**). Στον **L**, είναι αποφασίσιμο εάν ένας ακολουθητής είναι θεώρημα.

Απόδειξη. Η απόδειξη βρίσκεται στο [64]. □

Πόρισμα 2.4.6 (Συνέπεια του **L**). Ο **L** είναι συνεπής.

Σημείωση Η συνέπεια του **L** συνεπάγεται το ότι υπάρχουν προτάσεις που δεν ανήκουν σε αυτόν, επομένως υπάρχουν μη γραμματικές εκφράσεις.

Παρατήρηση Ο **L** είναι προσεταιριστικός, δηλαδή ισχύει ότι

$$A \bullet (B \bullet C) \leftrightarrow (A \bullet B) \bullet C.$$

Αποδεικνύουμε τη συνεπαγωγή. Η αντίστροφη συνεπαγωγή αποδεικνύεται ανάλογα.

Έστω ότι $X \equiv A \bullet ((A \backslash (A \bullet B)) \bullet ((A \bullet B) \backslash ((A \bullet B) \bullet C)))$. Έχουμε ότι

$$\cfrac{\cfrac{A \backslash B \to (C \backslash A) \backslash (C \backslash B)}{C \backslash A \bullet A \backslash B \to C \backslash B}}{C \bullet (C \backslash A \bullet A \backslash B) \to B}$$

Συνεπώς,

$$\cfrac{\cfrac{A \to A \qquad \cfrac{B \to A \backslash (A \bullet B) \qquad C \to (A \bullet B) \backslash ((A \bullet B) \bullet C)}{B \bullet C \to (A \backslash (A \bullet B)) \bullet ((A \bullet B) \backslash ((A \bullet B) \bullet C))}}{A \bullet (B \bullet C) \to X} \qquad X \to (A \bullet B) \bullet C}{A \bullet (B \bullet C) \to (A \bullet B) \bullet C}$$

Παρατήρηση Κάτι άλλο που βλέπουμε είναι ότι περνάμε από τους νόμους απαλοιφής της γραμματικής AB, δηλαδή νόμους διαγραφής της μορφής

$$\frac{A \qquad A \backslash B}{B} \backslash_\varepsilon \quad \text{και} \quad \frac{B/A \qquad A}{B} /_\varepsilon$$

σε νόμους εισαγωγής, δηλαδή

$$\frac{A, \Delta \vdash B}{\Delta \vdash A \backslash B} \backslash_{\mathcal{R}} \text{ όπου } \Delta \text{ μη κενό} \quad \text{και} \quad \frac{\Delta, A \vdash B}{\Delta \vdash B/A} /_{\mathcal{R}} \text{ όπου } \Delta \text{ μη κενό.}$$

Οι δύο τελευταίοι νόμοι αναφέρονται σε μια σπουδαία έννοια του Λογισμού Λάμπεκ, την έννοια της υποθετικής συλλογιστικής. Τί είναι, όμως, η υποθετική συλλογιστική;

Ο Λάμπεκ προσπαθώντας να βρει τους τύπους των αντωνυμιών *αυτός* και *αυτόν* διείδε μερικές αδυναμίες της γραμματικής AB. Η λέξη *αυτός* μπορεί να εμφανιστεί μόνο ως υποκείμενο, όπως στην πρόταση *αυτός περπατά*. Οπότε, η λέξη αυτή χρειάζεται ένα κατηγόρημα, δηλαδή μία πρόταση δίχως υποκείμενο, από τα δεξιά. Οι προτάσεις χωρίς υποκείμενα είναι του τύπου $n\backslash s$, άρα λαμβάνουμε τον τύπο $s/(n\backslash s)$ για τη λέξη *αυτός*. Πράγματι, το αποτέλεσμα είναι το ίδιο:

$$\dfrac{\dfrac{\text{Αυτός}}{s/(n\backslash s)} \qquad \dfrac{\text{περπατά}}{n\backslash s}}{s}$$

Η ίδια επιχειρηματολογία οδήγησε στην αντιστοίχιση της λέξης *αυτόν* με τον τύπο $(s/n)\backslash s$.

Έτσι, εισήχθη για πρώτη φορά, αυτό που ονομάστηκε αργότερα **υποθετική συλλογιστική**. Όταν χρησιμοποιούμε τους νόμους εισαγωγής σε μια παραγωγή,[23] η σύμβαση συνίσταται στο να καταδείξουμε την παρουσία ενός τύπου A, ο οποίος οδηγεί στο συμπέρασμα τύπου B. Αυτό γίνεται εφικτό με την ένθεση της κατάλληλης κατηγορίας στην παραγωγή μαζί με κάποιον αριθμητικό δείκτη: αυτή είναι η υπόθεσή μας. Δηλαδή, έχουμε ότι

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{Αυτός}}{n} \qquad \dfrac{\text{---}1}{n\backslash s}}{s}}{s/(n\backslash s)} \qquad \dfrac{\text{περπατά}}{n\backslash s}}{s}$$

Μία βασική ιδιότητα της γραμματικής AB ήταν ότι μία λέξη μπορούσε να αντιστοιχεί σε πολλούς τύπους, όχι μόνο λόγω του διαφορετικού της ρόλου μέσα σε μια πρόταση, αλλά και εξαιτίας του πώς θα αναλυόταν συντακτικά η πρόταση αυτή. Έστω η πρόταση *το λιοντάρι βρυχάται*. Έχουμε ότι το ρήμα είναι τύπου $np\backslash s$, όπου np ο τύπος της ονοματικής φράσης (noun phrase), αφού αποτελεί ένα αμετάβατο ρήμα που πρέπει να δεχθεί μία ονοματική φράση από τα αριστερά, ώστε να σχηματίσει μία πρόταση. Θα μπορούσαμε, όμως, να θεωρήσουμε *το λιοντάρι* ως $s/(np\backslash s)$, δηλαδή ως μια πρόταση η οποία δέχεται από τα δεξιά μία άλλη πρόταση που δέχεται από τα αριστερά μία ονοματική φράση. Επομένως, μπορούμε να πούμε ότι ο τύπος A είναι επίσης και $B/A\backslash B$.

Έτσι, ο Λάμπεκ κατέληξε στο θεώρημα της ύψωσης, το οποίο αναφέρουμε παρακάτω μαζί με άλλα θεωρήματα χαρακτηριστικά του Λογισμού Λάμπεκ, μερικά από τα οποία διατυπώθηκαν μετά την εργασία του τελευταίου.

[23]Αργότερα, θα δείξουμε ότι υπάρχει και φυσικός συμπερασμός για τον **L** ισοδύναμος με τον ακολουθητικό λογισμό, άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε το νόμο της εισαγωγής.

Θεωρήματα Λογισμού Λάμπεκ (L)

1. Εφαρμογή:	$A/B \bullet B \to A$, $B \bullet B\backslash A \to A$
2. Συνεφαρμογή:	$A \to (A \bullet B)/B$, $A \to B\backslash(B \bullet A)$
3. Μονοτονία:	αν $A \to B$ και $C \to D$, τότε $A \bullet C \to B \bullet D$
4. Ισοτονία:	αν $A \to B$, τότε $A/C \to B/C$ και $C\backslash A \to C\backslash B$
5. Αντιτονία:	αν $A \to B$, τότε $C/B \to C/A$ και $B\backslash C \to A\backslash C$
6. Ύψωση:	$A \to B/(A\backslash B)$, $A \to (B/A)\backslash B$
7. Geach (κύριος συναρτητής):	$A/B \to (A/C)/(B/C)$, $B\backslash A \to (C\backslash B)\backslash(C\backslash A)$
8. Geach (δευτερεύων συναρτητής):	$B/C \to (A/B)\backslash(A/C)$, $C\backslash B \to (C\backslash A)/(B\backslash A)$
9. Σύνθεση:	$A/B \bullet B/C \to A/C$, $C\backslash B \bullet B\backslash A \to C\backslash A$
10. Αναδόμηση:	$(A\backslash B)/C \leftrightarrow A\backslash(B/C)$
11. (De)Currying:	$A/(B \bullet C) \leftrightarrow (A/C)/B$, $(A \bullet B)\backslash C \leftrightarrow B\backslash(A\backslash C)$

Παρατήρηση Αξίζει να αναφέρουμε ότι η ύψωση παίζει σημαντικό ρόλο στον **L**, καθώς μπορεί να μας δώσει νέους τύπους για μια λέξη, οι οποίοι ταυτόχρονα αποκαλύπτουν το συντακτικό της ρόλο. Γι'αυτό και μία διαφορετική ονομασία της είναι η ύψωση τύπου. Βέβαια, ελλοχεύει ο κίνδυνος ένα λεξικό να διογκωθεί ανεξέλεγκτα με τη συνεχή εφαρμογή ενός τέτοιου θεωρήματος, γι'αυτό και πρέπει να είμαστε προσεκτικοί στην εφαρμογή του θεωρήματος αυτού. Σε ανάλογη εγρήγορση οφείλουμε να είμαστε και με τα υπόλοιπα θεωρήματα.

Ας αποδείξουμε, τώρα, ένα από τα θεωρήματα του **L**, ενδεικτικά τη μονοτονία

$$\dfrac{\dfrac{A \to B \qquad \dfrac{B \bullet C \to B \bullet C}{B \to (B \bullet C)/C}}{\dfrac{A \to (B \bullet C)/C}{A \bullet C \to B \bullet C}} \qquad \dfrac{C \to D \qquad \dfrac{B \bullet D \to B \bullet D}{D \to B\backslash(B \bullet D)}}{\dfrac{C \to B\backslash(B \bullet D)}{B \bullet C \to B \bullet D}}}{A \bullet C \to B \bullet D}$$

Από εδώ και στο εξής θα χρησιμοποιούμε έναν αρκετά συγκεκριμένο ορισμό για να ορίσουμε τις κατηγοριακές γραμματικές που θα ανακύψουν. Επειδή αυτές θα βασίζονται σε ένα σύστημα συμπερασμού, οφείλουμε να το ορίσουμε.

Ορισμός 2.4.7. Ένα **σύστημα συμπερασμού** D είναι μια τριάδα $\langle \mathcal{F}, AX, R \rangle$, όπου

- $AX = \{\langle \Gamma, \Delta \rangle \mid \Gamma \in \mathcal{F}^*, \Delta \in \mathcal{F}^+\}$ το σύνολο των αξιωμάτων
- R το σύνολο των κανόνων συμπερασμού που χαρακτηρίζουν το σύστημα. Αυτοί είναι της μορφής

  Αν $\quad \Gamma_0 \to \Delta_0$ και ... και $\Gamma_\nu \to \Delta_\nu$
  τότε $\quad \Gamma \to \Delta$

  Επίσης, τους κανόνες τους γράφουμε ως

  $$\frac{\Gamma_0 \to \Delta_0 ... \Gamma_\nu \to \Delta_\nu}{\Gamma \to \Delta}$$

Ορισμός 2.4.8 (Τελικός ορισμός)**.** Μία **κατηγοριακή γραμματική** βασιζόμενη σε ένα σύστημα συμπερασμού D είναι μια τετράδα $\langle V_t, s, Lex, \langle \mathcal{F}, AX, R \rangle \rangle$ όπου

- V_t **τερματικό λεξιλόγιο** της γραμματικής
- s το **αρχικό σύμβολο**

- Lex, το **λεξικό**, δηλαδή ένα σύνολο ζευγών $\langle w, c\rangle$, λεξικολογικών αντιστοιχίσεων με $w \in V_t$ και $c \in \mathcal{F}$ και γράφουμε $w \to c$.

Άρα, με τον παραπάνω τρόπο, μπορούμε να ορίζουμε διάφορες κατηγοριακές γραμματικές, απλώς παρουσιάζοντας το εκάστοτε σύστημα συμπερασμού. Παραδείγματος χάρη, κάτι τέτοιο μπορούμε να κάνουμε για τη γραμματική AB.

Ορισμός 2.4.9. Η γραμματική AB είναι μία κατηγοριακή γραμματική με το σύστημα συμπερασμού $D = \langle \mathcal{F}, AX, R\rangle$ τέτοιο ώστε

- $AX = \{a \to a \mid a \in \mathcal{F}\}$
- το R να αποτελείται από τους κανόνες, οι οποίοι καλούνται **βασικοί κανόνες διαγραφής**.

$$\frac{\Gamma \to A/B \qquad \Delta \to B}{\Gamma\Delta \to A} \qquad \frac{\Gamma \to B \qquad \Delta \to B\backslash A}{\Gamma\Delta \to A}$$

Αργότερα, όμως, θα παρουσιάσουμε συνοπτικά τις κατηγοριακές γραμματικές που εμφανίζονται στην παρούσα εργασία, ούτως ώστε να υπάρχει μία συνολική και σαφής παρουσίαση αυτών.

Ιδιότητες του Λογισμού Λάμπεκ

- Δεν υπάρχουν κανόνες συστολής ή εξασθένισης. Επομένως, η λογική είναι **γραμμική**, δηλαδή οι φόρμουλες μπορούν να ιδωθούν ως δεδομένα που δεν μπορούν να αντιγραφούν ή να διαγραφούν.
- Είναι ένας **πολλαπλασιαστικός λογισμός**, δηλαδή σε κάθε κανόνα όπου εμπλέκονται δύο προκείμενες, τα συμφραζόμενα του ακολουθητικού συμπεράσματος παρέχονται από την πρόσθεση των συμφραζομένων των δύο ακολουθητών των προκειμένων. Αυτό σημαίνει πως ο λογισμός περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο θα συνδυαστούν τα δεδομένα.
- Είναι ένας **διαισθητικός λογισμός**, δηλαδή κεντρική θέση στη φιλοσοφία του κατέχει όχι η αλήθεια, αλλά η απόδειξη που ισοδυναμεί με τη συντακτική ανάλυση μιας πρότασης. Επίσης, υφίσταται η απαίτηση της μίας μόνο φόρμουλας δεξιά του $\vdash$.
- Είναι ένας **μη αντιμεταθετικός λογισμός**, δηλαδή δεν υπάρχει κάποιος κανόνας ανταλλαγής και, συνακόλουθα, δεν υπάρχει τρόπος απόδειξης της αντιμεταθετικότητας του γινομένου. Αυτό, διαισθητικά, αντιστοιχεί στο γεγονός ότι διαχειριζόμαστε μία ιεραρχημένη σειρά δεδομένων.
- Τέλος, μια απόδειξη δεν πρέπει να περιέχει κανέναν ακολουθητή στερούμενο υπόθεσης. Αυτή η απαίτηση είναι μάλλον **γλωσσολογική** παρά λογική. Χωρίς αυτό το επιπλέον χαρακτηριστικό, οι τύποι της κενής πρότασης θα αποτελούσαν ταυτολογίες σύμφωνα με το Λογισμό Λάμπεκ, επομένως κάποιος θα μπορούσε να ισχυριστεί ότι μια λέξη χρειάζεται στα δεξιά ή στα αριστερά της ένα συστατικό στοιχείο, του οποίου ο τύπος είναι ταυτολογία.

Πριν προχωρήσουμε στην επόμενη ενότητα, παρουσιάζουμε έναν πίνακα με κάποια μέρη του λόγου και οι τύποι που μπορούν να αποδοθούν σε αυτά. Προφανώς, εκτός κάποιων περιπτώσεων, κάθε μέρος του λόγου μπορεί να αντιστοιχεί σε πάνω από έναν τύπο.

άρθρα:	np/n
ουσιαστικά:	n
αμετάβατα ρήματα:	$np\backslash s$ ή s
μεταβατικά ρήματα:	$np\backslash s/np$ ή s/np
επιρρήματα:	$s\backslash s$ ή s/s

Σημείωση Στην ελληνική γλώσσα, λόγω της μορφολογίας της,[24] το υποκείμενο ενσωματώνεται ενίοτε στο ρήμα και δεν υπονοείται απλώς, αλλά δηλώνεται. Αυτό συμβαίνει στα πρόσωπα του α' και β' ενικού και πληθυντικού. Σε αυτές τις περιπτώσεις, η προσωπική αντωνυμία χρησιμοποιείται μόνο για να δώσει έμφαση. Επί παραδείγματι, η λέξη *αδρανώ* αποτελεί ολοκληρωμένη πρόταση, της οποίας το υποκείμενο δηλώνεται σαφώς στην κατάληξη. Η πρόταση *εγώ αδρανώ* δίνει έμφαση στο δρουν, εδώ αδρανούν, υποκείμενο. Συνεπώς, στα ρήματα μπορεί να αποδοθεί ο τύπος s, κάτι το οποίο δε συμβαίνει σε γλώσσες όπως τα αγγλικά ή τα κινεζικά, όπου το υποκείμενο είναι απαραίτητο.

2.5 Μη προσεταιριστικός Λογισμός Λάμπεκ

Το 1961, ο Λάμπεκ επανήλθε με τη δημοσίευσή του *Περί του λογισμού των συντακτικών τύπων* [52], όπου παρουσίασε το μη προσεταιριστικό λογισμό των συντακτικών τύπων, αργότερα γνωστό ως **μη προσεταιριστικό Λογισμό Λάμπεκ**, ο οποίος συμβολίζεται ως **NL**.[25] Το πρόβλημα που διέγνωσε ο Λάμπεκ ήταν ότι ο πρώτος λογισμός αδυνατούσε να διαχειριστεί και κατ'επέκταση να υπολογίσει προτάσεις με φαινόμενα συστατικότητας, όπως η παρατακτική ή η υποτακτική σύνδεση. Λόγου χάρη, προτάσεις όπως *ο Γιάννης είδε τη Μαρία τη Δευτέρα και τον Αλέξη την Τρίτη* ή *ο Γιάννης αγαπά αλλά ο Πέτρος φοβάται τα ζώα*. Σε αυτές τις προτάσεις θα έπρεπε πρώτα να εισαχθούν οι κατάλληλες παρενθέσεις και μετά να αναλυθούν συντακτικά.

Παράδειγμα 2.5.1. Έστω η πρόταση *νομίζω ότι έχει δίκιο*. Αν θεωρήσουμε πως είναι μια έκφραση του **L**, τότε εφόσον είναι γραμματική η έκφραση *νομίζω (ότι έχει δίκιο)* είναι και η έκφραση *(νομίζω ότι έχει) δίκιο*. Αυτό, όμως, δεν ισχύει. Πράγματι, αν θεωρήσουμε την πρώτη περίπτωση έχουμε

$$\dfrac{\dfrac{\text{Νομίζω}}{s/np} \qquad \dfrac{\dfrac{\text{ότι}}{np/s} \qquad \dfrac{\dfrac{\text{έχει}}{s/n} \qquad \dfrac{\text{δίκιο}}{n}}{s}}{np}}{s}$$

ενώ αν θεωρήσουμε τη δεύτερη βλέπουμε η έκφρασή μας δεν είναι γραμματική και καταλήγουμε σε άτοπο. Αν, όμως, θεωρήσουμε την πρόταση εντός του **NL**, τότε λαμβάνουμε μόνο μία περίπτωση και η πρότασή μας είναι σωστή. Υιοθετούμε και εδώ τη διατύπωση του Μόορτγκατ [57].

Ορισμός 2.5.2 (Μη Προσεταιριστικός Λογισμός Λάμπεκ (**NL**))**.** Οι ακολουθητές είναι της μορφής $\mathcal{S} \vdash \mathcal{F}$, όπου $\mathcal{S} ::= \mathcal{F} \mid (\mathcal{S}, \mathcal{S})$. Γράφουμε $\Gamma[\Delta]$ όταν ο όρος Γ περιέχει μία διακεκριμένη εμφάνιση του υπόορου Δ. (Οι διακεκριμένες εμφανίσεις ενός κανόνα συμπερασμού στην προκείμενη και στο συμπέρασμα θεωρούμε πως καταλαμβάνουν την ίδια θέση εντός του Γ.)

[24]Η μορφολογία είναι κλάδος της γλωσσολογίας που μελετά τα μορφήματα. Αυτά προκύπτουν από συνδυασμούς φωνημάτων και είναι λέξεις, ρίζες λέξεων και επιθέματα. Αποτελούν τη μονάδα της γλώσσας, δηλαδή τα μικρότερα δομικά στοιχεία που σχηματίζουν νόημα.

[25]**NL**: **N**on-associative **L**ambek (calculus)

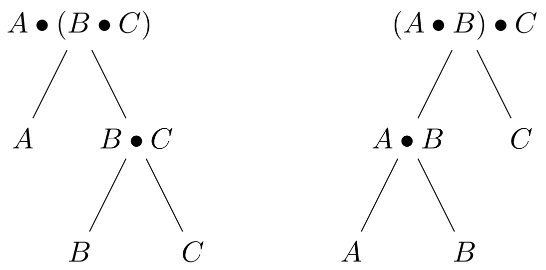
Αξίωμα	**Τομή**
$$\text{αξίωμα}\ \frac{}{A \vdash A}$$	$$\frac{\Delta \vdash A \qquad \Gamma[A] \vdash C}{\Gamma[\Delta] \vdash C}\ \text{τομή}$$
$$[/L]\ \frac{\Delta \vdash B \qquad \Gamma[A] \vdash C}{\Gamma[(A/B, \Delta)] \vdash C}$$	$$\frac{(\Gamma, B) \vdash A}{\Gamma \vdash A/B}\ [/R]$$
$$[\backslash L]\ \frac{\Delta \vdash B \qquad \Gamma[A] \vdash C}{\Gamma[(\Delta, B\backslash A)] \vdash C}$$	$$\frac{(B, \Gamma) \vdash A}{\Gamma \vdash B\backslash A}\ [\backslash R]$$
$$[\bullet L]\ \frac{\Gamma[(A, B)] \vdash C}{\Gamma[A \bullet B] \vdash C}$$	$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Delta \vdash B}{(\Gamma, \Delta) \vdash A \bullet B}\ [\bullet R]$$

Πίνακας 2.4: Ακολουθητικός λογισμός για τον **NL**

Από τον NL στον L Βλέπουμε ότι, δεδομένου του ορισμού 2.5.2, για να σχηματίσουμε τον **L**, αρκεί να προσθέσουμε τον ακόλουθο δομικό κανόνα της προσεταιριστικότητας:

$$\frac{\Gamma[((\Delta_1, \Delta_2), \Delta_3)] \vdash A}{\Gamma[(\Delta_1, (\Delta_2, \Delta_3))] \vdash A}\ \text{προσ.}$$

Η διπλή γραμμή του συμπερασμού υποδηλώνει το αμφίδρομο αυτού. Συνεπώς, η βασική διαφορά μεταξύ **L** και **NL** είναι ότι ο δεύτερος απαιτεί όλοι οι ηγούμενοι όροι να είναι δέντρα φορμουλών, δηλαδή ακολουθίες συμβόλων εντός παρενθέσεων, ενώ, στον πρώτο, οι ηγούμενοι όροι μπορεί να είναι απλώς ακολουθίες τύπων. Εποπτικά, αν ισχύει ο προσεταιριστικός νόμος μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι δημιουργούνται πάνω από ένα δέντρα, όπως παρακάτω:



Παράδειγμα 2.5.3. Έστω η πρόταση *κάποιος θέλει κάτι*. Έχουμε τις παραγωγές

$$\frac{\dfrac{\text{Κάποιος}}{n} \qquad \dfrac{\dfrac{\text{θέλει}}{n\backslash s/n} \quad \dfrac{\text{κάτι}}{n}}{n\backslash s}}{s} \qquad \frac{\dfrac{\dfrac{\text{Κάποιος}}{n} \quad \dfrac{\text{θέλει}}{n\backslash s/n}}{s/n} \qquad \dfrac{\text{κάτι}}{n}}{s}$$

οι οποίες αντιστοιχούν στις προτάσεις *κάποιος (θέλει κάτι)* και *(κάποιος θέλει) κάτι*. Το παραπάνω λέγεται πρόβλημα της **πλασματικής αμφισημίας**: σε μία πρόταση αντιστοιχούν πολλά αποδεικτικά δέντρα. Το πρόβλημα αυτό προφανώς οξύνεται με την προσεταιριστικότητα. Άρα, με τον **NL** επιχειρείται μια απλοποίηση της αποδεικτικής διαδικασίας, παρά το διαφαινόμενο περιορισμό που εισάγει, κάτι το οποίο αποβαίνει εξαιρετικά σημαντικό, ειδικά στο υπολογιστικό κομμάτι της συντακτικής ανάλυσης.

Εξαιτίας της απουσίας δομικών κανόνων στον **NL** και των ιδιοτήτων που φέρει ο **L**, ιδιότητες που αναπότρεπτα κληρονομεί ο **NL**, το συμπερασματικό σύστημα του **NL** ονομάστηκε αργότερα **καθαρή λογική υπολειμματικότητας**.[26]

Ορισμός 2.5.4 (Αξιωματικό σύστημα **NL**). Το αξιωματικό σύστημα **NL** ορίζεται από το αξίωμα και τους κάτωθι κανόνες. Έστω A, B, C τύποι, τότε

Αξίωμα: $A \vdash A$

Μεταβατικότητα: αν $A \vdash B$ και $B \vdash C$, τότε $A \vdash C$

Υπολειμματική τριάδα: $A \vdash C/B$ αν και μόνο αν $A \bullet B \vdash C$ αν και μόνο αν $B \vdash A \backslash C$

Η έννοια της υπολειμματικότητας έπαιξε αργότερα μεγάλο ρόλο στις κατηγοριακές γραμματικές, διότι επέτρεψε την ευχερέστερη οργάνωση και διαχείριση γραμματικών με περισσότερες από μία υπολειμματικές τριάδες, οι οποίες γραμματικές δημιουργήθηκαν πάντα με στόχο την πληρέστερη περιγραφή του γλωσσικού φαινομένου.

Ορισμός 2.5.5 (Υπολειμματικότητα). Έστω $\mathcal{A} = (A, \sqsubseteq_A)$, $\mathcal{B} = (B, \sqsubseteq_B)$ και $\mathcal{C} = (C, \sqsubseteq_C)$ τρία μερικώς διατεταγμένα σύνολα. Ένα ζεύγος συναρτήσεων (f, g) τέτοιες ώστε $f : A \to B$ και $g : B \to A$ σχηματίζει ένα **υπολειμματικό ζεύγος** αν ισχύει η [RES_1].

[RES_1] $\forall x \in A, y \in B$ ισχύει ότι $fx \sqsubseteq_B y \Leftrightarrow x \sqsubseteq_A gy$.

Μία τριάδα συναρτήσεων (f, g, h) τέτοιες ώστε $f : A \times B \to C$, $g : A \times C \to B$ και $h : C \times B \to A$ σχηματίζει μια **υπολειμματική τριάδα** αν ισχύει η [RES_2].

[RES_2] $\forall x \in A, y \in B, z \in C$ ισχύει ότι $f(x, y) \sqsubseteq_C z \Leftrightarrow y \sqsubseteq_B g(x, z) \Leftrightarrow x \sqsubseteq_A h(z, y)$.

Παρατήρηση Εύκολα, λοιπόν, βλέπουμε ότι η έννοια της υπολειμματικότητας συνδέεται άμεσα με αυτήν των συζυγών συναρτητών.

Λόγω αυτής της «καθαρότητας» του **NL**, τα θεωρήματα, τα οποία ισχύουν σε αυτόν, είναι τα πρώτα έξι του **L**, δηλαδή αυτά της εφαρμογής, της συνεφαρμογής, της μονοτονίας, της ισοτονίας, της αντιτονίας και της ύψωσης.

Συμπερασματικά, η επιλογή του αξιωματικού συστήματος και κατ'επέκταση των κανόνων αυτού είναι ένα λεπτό ζήτημα: από τη μια μεριά, οι κανόνες οφείλουν να είναι τόσο ισχυροί ώστε να επιτρέπουν το συμπερασμό προτασιακών δομών στο μέτρο που απαιτούμε, κάτι το οποίο αυξάνει την εκφραστικότητα της γραμματικής. Από την άλλη μεριά, οι κανόνες δεν πρέπει να είναι πολύ εκφραστικοί για να μην επιτρέπουν επιπλέον δομικές αναλύσεις, όπως αυτές προκύπτουν λόγου χάρη στην πλασματική αμφισημία, οι οποίες δυσχεραίνουν αντί να διευκολύνουν τη συντακτική ανάλυση. Ένας από τους κύριους λόγους που αναπτύχθηκε ο **NL**, λοιπόν, είναι ο αποκαλούμενος δομικός έλεγχος.

2.6 Λογισμός Λάμπεκ-Φαν Μπένθεμ

Στην προηγούμενη ενότητα είδαμε ένα από τα πρώτα βήματα της μαθηματικής γλωσσολογίας, το οποίο αργότερα ονομάστηκε **κατηγοριακή λογική των τύπων**.[27] Στο πνεύμα

[26] Μια παρουσίαση των κατηγοριακών λογικών αυστηρά από αυτήν τη σκοπιά μπορεί να βρεθεί στο [17].
[27] Categorial Type Logics

αυτό των λογισμών Λάμπεκ (**L** και **NL**), συνέχισε ο Φαν Μπένθεμ με τις εργασίες του εισάγοντας δύο νέες γραμματικές: την **NLP** και την **LP**, οι οποίες συναποτελούν το Λογισμό Λάμπεκ-Φαν Μπένθεμ.[28]

Αν θεωρήσουμε τον **NL** ως βάση, όπως αυτός διατυπώθηκε στον ορισμό 2.5.2, μπορούμε να σχηματίσουμε τη γραμματική **NLP**[29] προσθέτοντας τον ακόλουθο δομικό κανόνα της μετάθεσης:

$$\frac{\Gamma[(\Delta_2, \Delta_1)] \to A}{\Gamma[(\Delta_1, \Delta_2)] \to A}\ \text{μετάθεση}$$

Αν σε αυτόν προσθέσουμε και τον κανόνα της προσεταιριστικότητας, όπως τον διατυπώσαμε στην προηγούμενη ενότητα, λαμβάνουμε τον **LP**.[30] Μία εναλλακτική διατύπωση του **LP** προκύπτει αν παραλλάξουμε τον ορισμό 2.4.2 και απαιτήσουμε οι υποθέσεις των ακολουθητών να μην είναι ακολουθίες φορμουλών, αλλά πολυσύνολα.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{LP} & \\
\mathbf{NLP} \arrow[ur, "\text{προσ.}"] & & \mathbf{L} \arrow[ul, "\text{μετ.}"'] \\
 & \mathbf{NL} \arrow[ul, "\text{μετ.}"] \arrow[ur, "\text{προσ.}"'] &
\end{tikzcd}$$

Σχήμα 2.1: Ιεραρχία Λάμπεκ

Τα θεωρήματα που χαρακτηρίζουν την **NLP** είναι τα πρώτα έξι των θεωρημάτων του **L** συν τα εξής:

12. Αντιμετάθεση	αν $A \to B\backslash C$ τότε $B \to A\backslash C$
13. Ανταλλαγή	$A/B \leftrightarrow B\backslash A$
14. Πρόθεση/Μετάθεση	$A \to B/(B/A)$, $A \to (A\backslash B)\backslash B$

ενώ για τον **LP** ισχύουν όλα (1-14), καθώς και το θεώρημα της μικτής σύνθεσης:
$A/B \bullet C\backslash B \to C\backslash A, B/C \bullet B\backslash A \to A/C$.

Παράδειγμα 2.6.1. Αρχικά, εισάγουμε την εμπρόθετη φράση ως ατομικό τύπο, έστω *pp*.[31] Έστω η πρόταση *ο επισκέπτης έφτασε στο σπίτι*. Η συντακτική ανάλυση δίνει

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{Ο}}{np/n}\quad\dfrac{\text{επισκέπτης}}{n}}{np}\qquad\dfrac{\dfrac{\text{έφτασε}}{np\backslash s/pp}\quad\dfrac{\dfrac{\text{στο}}{pp/n}\quad\dfrac{\text{σπίτι}}{n}}{pp}}{np\backslash s}}{s}$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα της ανταλλαγής δύο φορές λαμβάνουμε

$$np\backslash(s/pp) \to np\backslash(pp\backslash s) \to pp\backslash s/np.$$

[28] Συνήθως, η αναφορά στο λογισμό αυτό περιορίζεται στον **LP**. Ο λόγος θα φανεί παρακάτω.
[29] **NLP**: **N**on-associative **L**ambek (calculus) with **P**ermutation
[30] **LP**: **L**ambek with **P**ermutation
[31] Από το αγγλικό *prepositional phrase*.

Επομένως, βάσει της γραμματικής μας, συμπεραίνουμε ότι και η έκφραση *στο σπίτι έφτασε ο επισκέπτης* είναι γραμματική.

Βλέπουμε, λοιπόν, τη χρησιμότητα των γραμματικών του Φαν Μπένθεμ για γλώσσες όπως τα ελληνικά, όπου η μεταθέσεις απαντώνται συχνά στη γλώσσα, κάτι το οποίο δε συμβαίνει σε γλώσσες όπως τα αγγλικά ή τα γαλλικά.

Παρατήρηση Είναι αλήθεια ότι μια κατηγοριακή γραμματική όπως η **NLP**, η οποία επιτρέπει μεταθέσεις ενώ δεν είναι προσεταιριστική, δεν έχει μεγάλη γλωσσολογική αξία. Πράγματι, δοθείσης της ακολουθίας $A \bullet (B \bullet C)$ το μέγιστο που μπορούμε να πράξουμε καταλήγει στο εξής: $A \bullet (B \bullet C) \vdash (C \bullet B) \bullet A$ και όχι λόγου χάρη στο $A \bullet (B \bullet C) \vdash (A \bullet B) \bullet C$. Παρόλα αυτά χρησιμοποιείται στην επιστημική λογική αρκούντως αποτελεσματικά.[32]

Η προσφορά του Φαν Μπένθεμ, όμως, δεν περιορίζεται απλώς στην εισαγωγή άλλης μιας γραμματικής. Αυτό που προσπάθησε ήταν η δημιουργία μίας διεπαφής μεταξύ του συντακτικού και της σημασιολογίας, μίας ενοποίησης, η οποία ενυπήρχε τουλάχιστον ως τάση ήδη από τον Αϊντουκιέβιτς. Αφετηρία του ήταν το έργο του Μοντέιγκ, όπου συντακτικό και σημασιολογία συμβαδίζουν: για κάθε συντακτικό κανόνα υπάρχει ένας αντίστοιχος σημασιολογικός, ο οποίος δομεί την αναπαράσταση του νοήματος της φράσης που αναλύεται συντακτικά.

λ-λογισμός Για να γίνουμε πιο σαφείς, πρέπει πρώτα να διατυπώσουμε και να ορίσουμε μερικές έννοιες ξεκινώντας από το **λ-λογισμό**. Ο λ-λογισμός μπορεί να θεωρηθεί ως η μικρότερη καθολική προγραμματιστική γλώσσα του κόσμου. Αποτελείται από ένα μόνο μετασχηματιστικό κανόνα και μία μόνο μέθοδο ορισμού συνάρτησης. Ο λ-λογισμός είναι καθολικός με την έννοια ότι οποιαδήποτε υπολογίσιμη συνάρτηση μπορεί να εκφραστεί και να χρησιμοποιηθεί με αυτόν το φορμαλισμό.

Κεντρική ιδέα του λ-λογισμού είναι η **έκφραση**. Ένα **όνομα** ή **μεταβλητή** είναι ένα αναγνωριστικό, έστω $x, y, z, \ldots$. Μία έκφραση ορίζεται **αναδρομικά** ως εξής:

<έκφραση>	:=	<όνομα> | <συνάρτηση> | <εφαρμογή>
<συνάρτηση>	:=	λ<όνομα>.<έκφραση> <εφαρμογή>
<εφαρμογή>	:=	<έκφραση><έκφραση>

Επίσης, έχουμε ότι

- αν M, N είναι λ-όροι τότε (M, N) είναι λ-όρος (εφαρμογή)
- αν M είναι λ-όρος τότε $\lambda x.M$ είναι λ-όρος (λ-αφαίρεση)
- $\Lambda =$ το σύνολο των λ-όρων

Μία έκφραση μπορεί να περιέχει παρενθέσεις ώστε να καθίσταται σαφέστερη. Οι μόνες λέξεις κλειδιά της γλώσσας είναι το λ και η τελεία. Η απλούστερη συνάρτηση είναι η

$$\lambda x.x$$

η οποία ορίζεται ως η ταυτοτική. Το όνομα μετά το λ είναι το αναγνωριστικό του ορίσματος της συνάρτησης, ενώ το μέρος της έκφρασης μετά την τελεία λέγεται σώμα του ορισμού. Οι συναρτήσεις μπορούν να έχουν τη θέση ορισμάτων σε εκφράσεις, όπως ακολούθως:

$$(\lambda x.x)y.$$

Προς το παρόν θα περιοριστούμε σε αυτά τα πολύ λίγα για το λ-λογισμό και, κατόπιν, αν χρειαστεί, θα επανέλθουμε.

[32]Πιο συγκεκριμένα, χρησιμοποιείται ο μη προσεταιριστικός μεταθετικός Λογισμός Λάμπεκ με άρνηση και ταυτοτικό στοιχείο συμβολιζόμενος ως $\mathbf{NLP_{01}}$ [79].

Ο ισομορφισμός Curry-Howard Ο ισομορφισμός Curry-Howard συνίσταται στον ισχυρισμό ότι υπάρχει μία τέλεια ισοδυναμία μεταξύ τυπικών συστημάτων και του φυσικού συμπερασμού για τη διαισθητική λογική [82]. Μία απόδειξη, βάσει του φυσικού συμπερασμού, μιας πρότασης στη διαισθητική λογική είναι η καστασκευή ενός αντικειμένου που μαρτυρά την πρόταση αυτή. Με τον ισομορφισμό Curry-Howard υποστηρίζεται ότι οι αποδείξεις ισοδυναμούν με προγράμματα.

Ο ισομορφισμός ή, καλύτερα, αντιστοιχία[33] Curry-Howard πρόκειται για μια απόπειρα ενοποίησης του συντακτικού και της σημασιολογίας στη λογική μέσω της απεικόνισης φορμουλών σε τύπους και αποδείξεων σε όρους του λ-λογισμού. Στο πεδίο των κατηγοριακών γραμματικών, οι φόρμουλες αντιστοιχούν σε συντακτικές κατηγορίες. Στον ακόλουθο πίνακα, παρουσιάζονται μερικές αντιστοιχίες Curry-Howard:

Λογική	**λ-λογισμός**	**Κατηγοριακές γραμματικές**
φόρμουλες	τύποι	συντακτικές κατηγορίες
αποδείξεις	όροι (προγράμματα)	συντακτική παραγωγή
		σημασιολογική σύνθεση

Πίνακας 2.5: Αντιστοιχία Curry-Howard μεταξύ λογικής, λ-λογισμού και κατηγοριακών γραμματικών

Αυτό που πρέπει να τονιστεί εδώ είναι ότι η ισοδυναμία αυτή ισχύει για το φυσικό συμπερασμό και όχι για τον ακολουθητικό λογισμό, κάτι το οποίο αντιμετωπίστηκε με τη διατύπωση του **L** με το φυσικό συμπερασμό (2.6).

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Delta \vdash A\backslash B}{\Gamma, \Delta \vdash B}\,\backslash_e \qquad\qquad \frac{A, \Gamma \vdash C}{\Gamma \vdash A\backslash C}\,\backslash_i\ \Gamma \neq \varepsilon$$

$$\frac{\Delta \vdash B/A \qquad \Gamma \vdash A}{\Delta, \Gamma \vdash B}\,/_e \qquad\qquad \frac{\Gamma, A \vdash C}{\Gamma \vdash C/A}\,/_i\ \Gamma \neq \varepsilon$$

$$\frac{\Delta \vdash A \bullet B \qquad \Gamma, A, B, \Gamma' \vdash C}{\Gamma, \Delta, \Gamma' \vdash C}\,\bullet_e \qquad \frac{\Delta \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Delta, \Gamma \vdash A \bullet B}\,\bullet_i$$

$$\frac{}{A \vdash A}\,\text{αξίωμα}$$

Πίνακας 2.6: Φυσικός συμπερασμός για τον **L**

Εδώ, αποφεύγουμε τον τρόπο Prawitz (2.1) και θα τον παρουσιάσουμε με τη μορφή ακολουθητών. Παρόλα αυτά, ο εν λόγω λογισμός δεν είναι ακολουθητικός, αφού στερείται δεξιών κανόνων, του κανόνα της τομής και η έννοια της κανονικής απόδειξης, δεδομένης της ιδιότητας της υποφόρμουλας, είναι τελείως διαφορετική.

Σημείωση Δεν πρέπει να παραγνωρίσουμε ότι οι αποδείξεις του ακολουθητικού λογισμού και του φυσικού συμπερασμού είναι ισοδύναμες, συνεπώς όλες οι γραμματικές εκφράσεις της γλώσσας παραμένουν ανέπαφες. Είναι γνωστό επίσης ότι υπάρχει αντιστοιχία και για τις αποδείξεις, αλλά δεν είναι ένας καθαρός ισομορφισμός [42]. Μια λεπτομερής πραγματεία των αποδεικτικών συστημάτων που χρησιμοποιούνται στις κατηγοριακές γραμματικές βρίσκεται στο [75].

[33] Επειδή αναφερόμαστε σε λογικές που είναι πιο περιορισμένες από τη διαισθητική λογική, θα χρησιμοποιούμε τον όρο αντιστοιχία και όχι ισομορφισμός.

Ο Φαν Μπένθεμ, λοιπόν, ξεκινώντας από το μότο *η φυσική γλώσσα είναι μια προγραμματιστική γλώσσα* [86], προσπάθησε να εκμεταλλευτεί αυτές τις ιδέες, καθώς και κάποιες άλλες που είχε πριν από αυτόν διατυπώσει ο Μοντέιγκ σχετικά με τη σημασιολογία της φυσικής γλώσσας [55]. Έτσι, εισήγαγε τη σημασιολογία για τα καλά στις κατηγοριακές γραμματικές.

Έστω η απόδειξη της παραγωγής $A_1, ..., A_n \vdash B$. Αυτή μπορεί να αναγνωσθεί ως μια οδηγία κατασκευής του αποδεικτικού όρου t με παραμέτρους εισαγωγής $x_1, ..., x_n$. Στην προσέγγιση της συντακτικής ανάλυσης ως συμπερασμού, αυτή η ενέργεια τελικά σημαίνει ότι οι παραγωγές, των οποίων οι τύποι έχουν αντιστοιχηθεί σε σημασιολογικούς όρους, παρέχουν επίσης τη σκιαγράφηση της δόμησης της νοηματικής αναπαράστασης της υπό μελέτη πρότασης, δηλαδή έχουμε ότι

$$x_1 : \underbrace{A_1}_{w_1}, ...x_n : \underbrace{A_n}_{w_n} \vdash t : B$$

όπου $w_1, ..., w_n$ λέξεις της γλώσσας.

Ας προχωρήσουμε, λοιπόν, στον ορισμό του **LP** με όρους του λ-λογισμού. Να σημειωθεί πως ο **LP** πρόκειται για μια γλώσσα με φόρμουλες $\mathcal{F} ::= \mathcal{A} \mid \mathcal{F} \to \mathcal{F} \mid \mathcal{F} \circ \mathcal{F}$, όπου οι δύο συνεπαγωγές του **L** ($/, \backslash$) καταλήγουν σε μία λόγω του κανόνα της μετάθεσης.

Ορισμός 2.6.2. Απόδοση όρων για τον **LP**. Ορολογία: x, y, z για μεταβλητές, t, u, v για τυχαίους όρους, $u\,[t/x]$ για την αντικατάσταση του όρου t με τη μεταβλητή x στον όρο u. Στους ακολουθητές $x_1 : A_1, ..., x_n : A_n \vdash t : B$, οι όροι των υποθέσεων x_i είναι διακριτοί. Για τη συνεπαγωγή $\to$, ο κανόνας χρήσης αντιστοιχεί στη συναρτησιακή εφαρμογή, ο κανόνας απόδειξης στη συναρτησιακή αφαίρεση. Για το $\circ$, ο κανόνας απόδειξης αντιστοιχεί στη ζεύξη, ο κανόνας χρήσης στην προβολή. Ο κανόνας της τομής αντιστοιχεί στην αντικατάσταση.

$$\text{αξίωμα}\,\frac{}{x : A \vdash x : A} \qquad \frac{\Gamma \vdash t : A \qquad x : A, \Delta \vdash u : B}{\Gamma, \Delta \vdash u\,[t/x]}\,\text{τομή}$$

$$\frac{\Gamma, x : A, y : B, \Delta \vdash t : C}{\Gamma, y : B, x : A, \Delta \vdash t : C}\,\text{μετάθεση}$$

$$\to_{\mathcal{L}}\,\frac{\Delta \vdash t : A \qquad \Gamma, x : B \vdash u : C}{\Gamma, \Delta, y : A \to B \vdash u\,[y(t)/x] : C} \qquad \frac{\Gamma, x : A \vdash t : B}{\Gamma \vdash \lambda x.t : A \to B}\,\to_{\mathcal{R}}$$

$$\circ_{\mathcal{R}}\,\frac{\Gamma \vdash t : A \qquad \Delta \vdash u : B}{\Gamma, \Delta \vdash \langle t, u \rangle : A \circ B} \qquad \frac{\Gamma, x : A, y : B \vdash t : C}{\Gamma, z : A \circ B \vdash t\,[(z)_0/x, (z)_1/y] : C}\,\circ_{\mathcal{L}}$$

Συνεπώς, με αυτήν την πρακτική, υπάρχει αυτό που είναι γνωστό ως **αυτόματο νόημα**, δηλαδή η «απόδειξη» μιας πρότασης της φυσικής γλώσσας έχει δύο προϊόντα: όχι μόνο το συντακτικό αλλά και το σημασιολογικό. Αυτό αποτέλεσε σπουδαίο επίτευγμα για την ανάπτυξη των κατηγοριακών γραμματικών και έθεσε τα θεμέλια της διεπαφής συντακτικού και σημασιολογίας. Η **LP** παίζει πια τον ρόλο μιας γενικής γλώσσας, η οποία βασίζεται στη σημασιολογική σύνθεση και απομακρύνεται από μια αμιγώς συντακτική θεώρηση της γλώσσας.

Είναι προφανές, πως αυτή η πρακτική δεν περιορίζεται μόνο στην **LP**, αλλά μπορεί να εφαρμοστεί και στις υπόλοιπες κατηγοριακές γραμματικές με την ίδια επιτυχία. Λόγω αυτής της αντιστοιχίας λογικής και τύπων, οι κατηγοριακές γραμματικές είναι γνωστές και ως **τυπολογικές γραμματικές**.[34] Παρακάτω, παρουσιάζουμε τα θεωρήματα που ισχύουν για τους λογισμούς **NL**, **L** και **LP**, οι οποίοι έχουν και τη ζητούμενη γλωσσολογική αξία.

$$\mathbf{LP}\left\{\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{ll}
1.\ \text{Εφαρμογή:} & A/B \bullet B \to A,\ B \bullet B\backslash A \to A \\
2.\ \text{Συνεφαρμογή:} & A \to (A \bullet B)/B,\ A \to B\backslash(B \bullet A) \\
3.\ \text{Μονοτονία:} & \text{αν } A \to B \text{ και } C \to D,\ \text{τότε } A \bullet C \to B \bullet D \\
4.\ \text{Ισοτονία:} & \text{αν } A \to B,\ \text{τότε } A/C \to B/C \text{ και } C\backslash A \to C\backslash B \\
5.\ \text{Αντιτονία:} & \text{αν } A \to B,\ \text{τότε } C/B \to C/A \text{ και } B\backslash C \to A\backslash C \\
6.\ \text{Ύψωση:} & A \to B/(A\backslash B),\ A \to (B/A)\backslash B
\end{array}\right\}\mathbf{NL} \\
\begin{array}{ll}
7.\ \text{Geach (κύρ. συν.):} & A/B \to (A/C)/(B/C),\ B\backslash A \to (C\backslash B)\backslash(C\backslash A) \\
8.\ \text{Geach (δευτ. συν.):} & B/C \to (A/B)\backslash(A/C),\ C\backslash B \to (C\backslash A)/(B\backslash A) \\
9.\ \text{Σύνθεση:} & A/B \bullet B/C \to A/C,\ C\backslash B \bullet B\backslash A \to C\backslash A \\
10.\ \text{Αναδόμηση:} & (A\backslash B)/C \leftrightarrow A\backslash(B/C) \\
11.\ \text{(De)Currying:} & A/(B \bullet C) \leftrightarrow (A/C)/B,\ (A \bullet B)\backslash C \leftrightarrow B\backslash(A\backslash C)
\end{array}
\end{array}\right\}\mathbf{L} \\
\begin{array}{ll}
12.\ \text{Αντιμετάθεση:} & \text{αν } A \to B\backslash C \text{ τότε } B \to A\backslash C \\
13.\ \text{Ανταλλαγή:} & A/B \leftrightarrow B\backslash A \\
14.\ \text{Πρόθ./Μετάθεση:} & A \to B/(B/A),\ A \to (A\backslash B)\backslash B \\
15.\ \text{Μικτή σύνθεση:} & A/B \bullet C\backslash B \to C\backslash A,\ B/C \bullet B\backslash A \to A/C
\end{array}
\end{array}\right.$$

Αφού είδαμε τις σημαντικότερες των κατηγοριακών γραμματικών, θα δούμε πώς σχετίζονται με τις ασυμφραστικές γραμματικές, οι οποίες έχουν κυριαρχήσει τις τελευταίες δεκαετίες στην υπολογιστική γλωσσολογία.

2.7 Ασυμφραστικές γραμματικές και κατηγοριακές γραμματικές

Οι ασυμφραστικές γραμματικές διατυπώθηκαν από τον Τσόμσκι στην προσπάθειά του να βρει *απλές και «αποκαλυπτικές» γραμματικές που να παράγουν όλες τις προτάσεις της αγγλικής και μόνο αυτές τις προτάσεις* [31]. Αυτές οι γραμματικές είναι εξαιρετικά διαδεδομένες τόσο στη γλωσσολογία, καθώς περιγράφουν τη δομή των φυσικών γλωσσών, όσο και στην επιστήμη των υπολογιστών, στην περιγραφή των προγραμματιστικών γλωσσών και άλλων τυπικών γλωσσών.

Συγκεκριμένα, στη γλωσσολογία, χρησιμοποιείται ευρέως ο όρος **γραμματική φραστικής δομής**, ο οποίος αντιδιαστέλλεται από αυτόν της **γραμματικής εξάρτησης**. Στην επιστήμη των υπολογιστών, οι γραμματικές φραστικής δομής είθισται να παρουσιάζονται στη μορφή Μπάκους-Νάουρ, γνωστότερη ως μορφή BNF.[35] Αυτόν τον τρόπο χρησιμοποιήσαμε και εμείς σε κάποιους από τους ορισμούς, όπως στον ορισμό του λ-λογισμού στην ενότητα 2.6.

Σε ό,τι ακολουθεί θα χρησιμοποιήσουμε τον ακόλουθο συμβολισμό: έστω $\mathcal{M}$ ένα μη κενό σύνολο, το οποίο καλούμε **αλφάβητο**, του οποίου τα στοιχεία τα καλούμε **λέξεις**. Ορίζουμε ως **ακολουθία λέξεων** ή απλούστερα **ακολουθία** επί του $\mathcal{M}$ μία πεπερασμένη (πιθανώς κενή) ακολουθία $t_1 t_2 \ldots t_n$ στοιχείων του $\mathcal{M}$. Συμβολίζουμε την κενή ακολουθία με το γράμμα ε. Συμβολίζουμε με $\mathcal{M}^*$ το σύνολο όλων των ακολουθιών επί του αλφαβήτου $\mathcal{M}$. Το σύνολο όλων των μη κενών ακολουθιών επί του αλφαβήτου $\mathcal{M}$ το συμβολίζουμε με $\mathcal{M}^+$. Πριν ορίσουμε την ελεύθερη συμφραζομένων γραμματική, ας δούμε από πού γεννάται: είναι μία τυπική γραμματική.

[34] TLG: Type Logical Grammars
[35] Backus-Naur Form

Ορισμός 2.7.1. Μία **τυπική γραμματική**[36] είναι μια τετράδα $\langle \mathcal{T}, \mathcal{N}, s, R \rangle$, όπου

- $\mathcal{N}$ **αλφάβητο μη τερματικών συμβόλων**
- $\mathcal{T}$ **αλφάβητο τερματικών συμβόλων** τέτοιο ώστε $\mathcal{T} \cap \mathcal{N} = \emptyset$
- s το **αρχικό σύμβολο**
- R **σύνολο κανόνων παραγωγής** της μορφής $\alpha \to \beta$, όπου α, β συμβολοσειρές που περιέχουν τερματικά και μη τερματικά σύμβολα.

Οπότε, ο ορισμός 2.4.8 είναι, ουσιαστικά, ένας ορισμός στο πλαίσιο των τυπικών γραμματικών, όπου το σύστημα συμπερασμού παίζει το ρόλο του συνόλου των κανόνων παραγωγής. Το αλφάβητο των τερματικών συμβόλων αντιστοιχεί στις μεταβλητές τις γλώσσας, δηλαδή εκφράσεις που μπορούν να αλλάξουν με την εφαρμογή των κανόνων παραγωγής, ενώ το αλφάβητο των τερματικών συμβόλων αντιστοιχεί στις σταθερές τις γλώσσας, οι οποίες δεν μπορούν να αναλυθούν σε απλούστερες μονάδες.

Ορισμός 2.7.2. Η **τυπική γλώσσα** $\mathcal{L}$ ορίζεται ως το υποσύνολο όλων των πιθανών ακολουθιών επί ενός αλφαβήτου Σ, δηλαδή $\mathcal{L} \subset \Sigma^*$. Εάν υπάρχει μια συγκεκριμένη γραμματική, έστω G, η οποία παράγει μια γλώσσα, τότε η γλώσσα αυτή συμβολίζεται ως $\mathcal{L}(G)$. Δύο γραμματικές, έστω G, H, λέγονται **ισοδύναμες**, εάν παράγουν την ίδια γλώσσα, δηλαδή αν $\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}(H)$ και **ισχυρά ισοδύναμες** εάν έχουν ίδια συντακτικά δένδρα.

Αφού ορίσαμε την τυπική γραμματική, συνεχίζουμε με τον ορισμό της ασυμφραστικής γραμματικής.

Ορισμός 2.7.3. Μία **ασυμφραστική γραμματική** είναι μία τετράδα $\langle \mathcal{T}, \mathcal{W}, \sigma, \mathcal{R} \rangle$, όπου $\mathcal{T}$ και $\mathcal{W}$ δύο ξένα πεπερασμένα σύνολα, $\sigma \in \mathcal{W}$ και $\mathcal{R}$ ένα πεπερασμένο **σύνολο ασυμφραστικών παραγωγών** της μορφής $\alpha \to u$, όπου $\alpha \in \mathcal{W}$ και $u \in (\mathcal{T} \cup \mathcal{W})^*$. Το σύνολο $\mathcal{T}$ είναι το αλφάβητο των τερματικών συμβόλων, ενώ το $\mathcal{W}$ το αλφάβητο των μη τερματικών συμβόλων. Το σύμβολο σ είναι το αρχικό σύμβολο.

Μία γλώσσα λέγεται ασυμφραστική αν και μόνο αν υπάρχει μία ασυμφραστική γραμματική η οποία την παράγει.

Μία ασυμφραστική γραμματική είναι στην **κανονική μορφή Τσόμσκι** αν οι κανόνες παραγωγής της είναι της μορφής $x \to y\ z$ ή $x \to a$, όπου $x, y, z \in \mathcal{W}$ και $a \in \mathcal{T}$. Μία ασυμφραστική γραμματική είναι στην **κανονική μορφή Γκρέιμπατς** αν οι κανόνες παραγωγής της είναι της μορφής: $w \to aw_1...w_n$, όπου $w_1, ..., w_n \in \mathcal{W}$ και $a \in \mathcal{T}$.

Ιεραρχία Τσόμσκι Ο Τσόμσκι ταξινόμησε τις τυπικές γραμματικές σύμφωνα με τον τύπο των κανόνων παραγωγής τους (πίνακας 2.7). Οι γραμματικές κατατάσσονται με αυξανόμενους περιορισμούς, δηλαδή ισχύει ότι

$$\text{γραμ. τύπου } 3 \subset \text{γραμ. τύπου } 2 \subset \text{γραμ. τύπου } 1 \subset \text{γραμ. τύπου } 0$$

Να σημειωθεί ότι οι γραμματικές παράγουν ομώνυμες γλώσσες εκτός από τις γενικές, οι οποίες παράγουν τις **αναδρομικά απαριθμήσιμες** γλώσσες.

Μία σημαντική έννοια, την οποία δεν εξηγήσαμε, είναι αυτή του συντακτικού δένδρου. Για να την ορίσουμε, θα παραθέσουμε μερικούς ορισμούς ξεκινώντας από το γράφημα.[37]

[36] Προς αποφυγή συγχύσεων, είναι απαραίτητο να διευκρινίσουμε πως, στο πλαίσιο των τυπικών γραμματικών του Τσόμσκι, το επίθετο *τυπικός* αντιστοιχεί στο αγγλικό *formal* και δεν έχει καμία σχέση με την αγγλική λέξη *type* και τα παράγωγά της.

[37] Οι ορισμοί που ακολουθούν λαμβάνονται από το [81].

Τύπος	Γραμματική	Μορφή κανόνων παραγωγής
0	γενική	$\alpha \to \beta$, όπου $\alpha, \beta \in (\mathcal{N} \cup \mathcal{T})^*$ και $\alpha \in \varepsilon$
1	συμφραστική	$\alpha \to \beta$, όπου $\alpha, \beta \in (\mathcal{N} \cup \mathcal{T})^*$ και $\|\alpha\| \leq \|\beta\|$ (μπορεί επιπλέον να επιτρέπεται $s \to \varepsilon$, όπου $s \in \mathcal{N}$)
2	ασυμφραστική	$A \to \alpha$, όπου $A \in \mathcal{N}$ και $\alpha \in (\mathcal{N} \cup \mathcal{T})^*$
3	κανονική	$A \to w$, $A \to wB$ ή $A \to w$, $A \to Bw$, όπου $w \in T^*$, $A, B \in \mathcal{N}$

Πίνακας 2.7: Ιεραρχία Τσόμσκι

Ένα **ακατεύθυντο γράφημα**, ή απλώς **γράφημα**, είναι ένα σύνολο σημείων και ένα σύνολο γραμμών οι οποίες συνδέουν μεταξύ τους κάποια από αυτά τα σημεία. Τα σημεία ονομάζονται **κόμβοι** ή **κορυφές** και οι γραμμές ονομάζονται **ακμές**. Το πλήθος των ακμών που απολήγουν σε κάποιο συγκεκριμένο κόμβο λέγεται **βαθμός** του κόμβου αυτού.

Μία **διαδρομή** σε ένα γράφημα είναι οποιαδήποτε ακολουθία κόμβων συνδεόμενων διαδοχικά μεταξύ τους με ακμές. Αν κάθε κόμβος μιας διαδρομής εμφανίζεται σε αυτή μία μόνο φορά, η διαδρομή λέγεται **απλή**. Αν ο πρώτος και ο τελευταίος κόμβος μιας διαδρομής ταυτίζονται, η διαδρομή λέγεται **κύκλος**. **Απλός κύκλος** είναι κάθε κύκλος που περιέχει τουλάχιστον τρεις κόμβους, από τους οποίους ταυτίζονται μόνο ο πρώτος και ο τελευταίος.

Ένα γράφημα λέγεται **συνδεδεμένο** αν όλοι οι κόμβοι του συνδέονται ανά δύο μεταξύ τους μέσω κάποιας διαδρομής. Ένα συνδεδεμένο γράφημα χωρίς απλούς κύκλους λέγεται **δένδρο**. Ένα δένδρο ενδέχεται να περιέχει κάποιο διακεκριμένο κόμβο ο οποίος ονομάζεται **ριζικός κόμβος** ή **ρίζα**. Οι κόμβοι του δένδρου οι οποίοι έχουν βαθμό 1, εκτός από τον ριζικό, λέγονται **καταληκτικοί κόμβοι** ή **φύλλα**.

Ασυμφραστικές και AB γραμματικές Η σχέση μεταξύ των κλασικών γραμματικών και των ασυμφραστικών μελετήθηκε εξ ολοκλήρου, λίγο αφότου ο Μπαρ-Χιλλέλ πρωτοδιατύπωσε τις πρώτες [20]. Αποδείχτηκε ότι κάθε ασυμφραστική γραμματική άνευ κενής ακολουθία στη μορφή Γκρέιμπατς είναι ισχυρά ισοδύναμη με μία γραμματική AB. Επίσης, κάθε γραμματική AB είναι ισχυρά ισοδύναμη με μία ασυμφραστική γραμματική στην κανονική μορφή Τσόμσκι. Άρα, οι κατηγοριακές γραμματικές ταυτίζονται με τις γραμματικές AB.

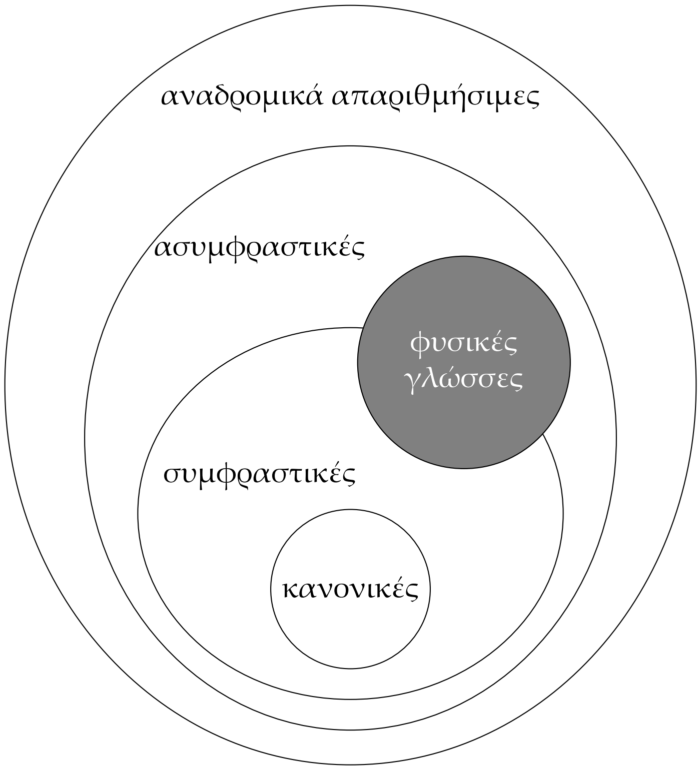
L, NL, LP και ασυμφραστικές γραμματικές Ο Τσόμσκι [32] είχε υποθέσει ότι οι γραμματικές Λάμπεκ είναι επίσης ισοδύναμες με τις ασυμφραστικές. Αυτήν την υπόθεση τη χαρακτήρισε ο Φαν Μπένθεμ [86] ως *ένα ανοιχτό πρόβλημα της σύγχρονης μαθηματικής γλωσσολογίας*. Ο Κόεν [34] απέδειξε ότι κάθε βασική κατηγοριακή γραμματική, δηλαδή κάθε ασυμφραστική γραμματική, είναι ισοδύναμη με μία γραμματική Λάμπεκ. Ο Μπουσκόφσκι [28] απέδειξε ότι κάποια είδη γραμματικών Λάμπεκ, όπως αυτή με μόνο ένα σύνδεσμο $\mathbf{L}^{\backslash}$ ή $\mathbf{L}^{/}$ καλούμενη και μονοκατεύθυντη, είναι ασυμφραστικές γραμματικές.

Ο Πέντους [69] απέδειξε ότι οι γραμματικές Λάμπεκ παράγουν μόνο τις ασυμφραστικές γλώσσες. Θεωρώντας τις υποθέσεις των ακολουθητών ως πολυσύνολα,[38] απεδείκνυε το ίδιο και για τον **LP**. Άρα, οι **L** και **LP** είναι ισοδύναμες με τις ασυμφραστικές γραμματικές που δεν περιέχουν την κενή ακολουθία. Ο Καντούλσκι [47] απέδειξε ότι ο **NL** είναι

[38] Είναι ο εναλλακτικός τρόπος σχηματισμού του **LP**, όπως τον περιγράψαμε στην ενότητα 2.6.

ισοδύναμος με τις ασυμφραστικές γραμματικές. Σε απάντηση όλων αυτών, ο Τίντε [84] απέδειξε ότι ο **L** δεν είναι ισχυρά ισοδύναμος με τις ασυμφραστικές γραμματικές.

Ο Σίμπερ στην εργασία του [80] απέδειξε ότι οι φυσικές γλώσσες είναι **ελαφρώς ασυμφραστικές** και, κατά συνέπεια, θα πρέπει να βρούμε κάποιον άλλο φορμαλισμό για να τις περιγράψουμε. Εφόσον είναι και οι κατηγοριακές γραμματικές που είδαμε μέχρι τα τώρα ασυμφραστικές θα πρέπει να κατασκευάσουμε νέες ισχυρότερες. Ας δούμε τη θέση των φυσικών γλωσσών στην ιεραρχία Τσόμσκι.



Σχήμα 2.2: Η θέση των φυσικών γλωσσών στην ιεραρχία Τσόμσκι

Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι οι Μόορτγκατ και Μόοτ, αναγνωρίζοντας τη φύση των φυσικών γλωσσών με τις εργασίες τους στις πολυτροπικές κατηγοριακές γραμματικές [56][63] και στο λογισμό Λάμπεκ-Γκρίσιν [58][59], προσπαθούν να ισχυροποιήσουν τις κατηγοριακές γραμματικές. Ο χώρος δεν επιτρέπει να επεκταθούμε σχετικά με αυτές. Απλώς, αναφέρουμε ότι το κλειδί στην κατασκευή αυτών είναι η έννοια της υπολειμματικότητας όπως την ορίσαμε στην ενότητα 2.5, η οποία επιτρέπει την εισαγωγή ομάδων τροπικών συνδέσμων,[39] μονομελών ή διμελών, οι οποίοι ορίζονται μέσω υπολειμματικών τριάδων.

[39] Στο επόμενο κεφάλαιο, θα διευκρινιστεί η έννοια της τροπικότητας στην αποδεικτική θεωρία.

Κεφάλαιο 3

Γραμμική λογική και κατηγοριακές γραμματικές

Η **γραμμική λογική**, η οποία εισήχθη από το Ζιράρ το 1987 [40], μπορεί να θεωρηθεί ως ένα παράδειγμα λογικής *συνειδητής ως προς τους πόρους της*: οι φόρμουλες αντιπροσωπεύουν τύπους κάποιων πόρων και οι πόροι δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν κατά βούληση. Δηλαδή, δοθέντος του ακολουθητή $A, A \vdash B$, έχουμε ότι: χρησιμοποιούμε δύο δεδομένα (πόρους) τύπου A ώστε να λάβουμε ένα δεδομένο τύπου B.

Αυτή η συνείδηση ως προς τους πόρους υπήρξε αναμφισβήτητα πόλος έλξης για τους γλωσσολόγους, καθώς οι πόροι αυτοί μπορούν κάλλιστα να θεωρηθούν προτάσεις μιας γλώσσας. Παραδείγματος χάρη, η γραμμική λογική είναι σε θέση να περιγράψει τον τρόπο με τον οποίο μία αλληλουχία λέξεων παράγει μία ακολουθία πόρων που μπορεί να καταναλωθεί για να δομήσει τη συντακτική ανάλυση μιας πρότασης. Επίσης, πώς τα νοήματα των λέξεων παρέχουν μία πλειάδα πόρων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να δομήσουν το νόημα μιας πρότασης.

Βέβαια, η γραμμική λογική δε δημιουργήθηκε αρχικά ως λογική των πόρων, αλλά προήλθε από αναζητήσεις σχετικά με το ρόλο των αποδείξεων στη λογική. Όπως το θέτει ο Ζιράρ, *η γραμμική λογική προέρχεται από μία ανάλυση της συνήθους λογικής από τη σκοπιά της αποδεικτικής θεωρίας* [41]. Και εδώ, η βαρύτητα δίνεται στην απόδειξη. Το ερώτημα δεν είναι *πότε αληθεύει το A*, *αλλά ποια είναι η απόδειξη του A*.

3.1 Από τη Θεωρία Κατηγοριών στη γραμμική λογική

Η θεμελιώδης ιδέα μιας κατηγορικής αντιμετώπισης της αποδεικτικής θεωρίας, όπως είδαμε στο πρώτο κεφάλαιο, είναι ότι οι προτάσεις θα πρέπει να ερμηνευθούν ως αντικείμενα μιας κατηγορίας και οι αποδείξεις ως μορφισμοί. Οι αποδεικτικοί κανόνες αντιστοιχούν σε φυσικούς ισομορφισμούς μεταξύ κατάλληλων συναρτητών ομομορφισμών (hom-functor). Πώς ορίζεται, τώρα, η γραμμική λογική βάσει της ιδέας αυτής;

Παραθέτουμε το κατηγορικό μοντέλο που προτείνει ο Μπίρμαν στην εργασία του [24].

Ορισμός 3.1.1. Μία **γραμμική κατηγορία** $\mathcal{C}$ *αποτελείται από*

1. *Μία συμμετρική μονοειδή κλειστή κατηγορία* $\mathcal{C}$ *μαζί με*

2. *ένα συμμετρικό μονοειδικό συμμοναδοειδές* $(!, \varepsilon, \delta, m_{A,B}, m_I)$ *τέτοιο ώστε*

(i) Για κάθε ελεύθερη !-συνάλγεβρα[1] $(!A, \delta_A)$ να υπάρχουν δύο διακεκριμένοι μονοειδείς φυσικοί μετασχηματισμοί με συστατικά $e_A :!A \to I$ και $d_A :!A \to !A \otimes !A^2$, οι οποίοι συναπαρτίζουν ένα αντιμεταθετικό συμμονοειδές και είναι συναλγεβρικοί μορφισμοί,

(ii) Όποτε $f : (!A, \delta_A) \to (!B, \delta_B)$ συναλγεβρικός μορφισμός μεταξύ ελεύθερων συναλγεβρών, τότε είναι επίσης συμμονοειδής μορφισμός.

Ο Μπίρμαν στην εργασία του, την οποία αναφέραμε, αναλύει διεξοδικά την κατασκευή αυτή με αντιμεταθετικά διαγράμματα που επιβεβαιώνουν το καλώς ορισμένο του ορισμού. Έτσι, προκύπτει το θεώρημα που περιγράφει ένα τμήμα της γραμμικής λογικής βάσει της θεωρίας κατηγοριών.

Θεώρημα 3.1.2. *Μία γραμμική κατηγορία $\mathcal{C}$ είναι ένα κατηγορικό μοντέλο της πολλαπλασιαστικής εκθετικής γραμμικής λογικής (**MELL**).*[2]

Απόδειξη. Η απόδειξη βρίσκεται στο [24]. □

Έτσι, λοιπόν, μεταβαίνουμε από τη Θεωρία Κατηγοριών στη γραμμική λογική. Ακολούθως, θα μεταβούμε από τις κατηγοριακές γραμματικές στη γραμμική λογική. Πρώτα, όμως, θα παρουσιάσουμε εν συντομία τη γραμμική λογική.

3.2 Ορισμοί

Η γραμμική λογική προκύπτει από την αφαίρεση των δομικών, μη γραμμικών, κανόνων από τη διαισθητική λογική, γι'αυτό και λέγεται **υποδομική λογική**.[3] Αφαιρούνται, λοιπόν, οι κανόνες της εξασθένισης και της συστολής

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma, A \vdash B}\,\mathcal{W} \qquad \frac{\Gamma, A, A \vdash B}{\Gamma, A \vdash B}\,\mathcal{C}$$

Από τη μεριά των γλωσσολογικών εφαρμογών, η απουσία των δύο αυτών δομικών κανόνων μοιάζει μια καλή αφετηρία, αφού, σε γενικές γραμμές, το πλήθος των εμφανίσεων μιας λέξης μέσα σε μια πρόταση σχετίζεται άμεσα με τη γραμματικότητα της πρότασης αυτής.

Και σε αυτήν τη λογική ισχύει το Hauptsatz του Γκέντζεν και, μάλιστα, η απόδειξή του είναι απλούστερη λόγω της απουσίας των δύο αυτών δομικών κανόνων. Η ιδιότητα απαλοιφής της τομής έχει πάντα βέβαια δύο ευχάριστα επακόλουθα: τη συνέπεια του συστήματος και την ιδιότητα της υποφόρμουλας.

Η γραμμική λογική υιοθετεί τελείως διαφορετικά σύμβολα από την παραδοσιακή λογική. Το εντυπωσιακότερο γεγονός είναι ότι υπάρχουν δύο μορφές σύζευξης ($\otimes$ και $\&$) και δύο μορφές διάζευξης ($\parr$ και $\oplus$). Υπάρχουν, επίσης, δύο μορφές αλήθειας ($\top$ και $\mathbf{1}$) και δύο μορφές ψεύδους ($\perp$ και $\mathbf{0}$). Τέλος, υπάρχουν δύο μορφές συνεπαγωγής ($\multimap$ και $\multimapinv$). Ας δούμε, όμως, τα σύμβολα της γραμμικής λογικής, τη σημασία τος και τι ρόλο παίζουν στο σύστημα συμπερασμού μας.

Γραμμική συνεπαγωγή: $\multimap$

Το $A \multimap B$ σημαίνει πως μπορούμε να καταναλώσουμε έναν πόρο A για να παραγάγουμε έναν πόρο B.[4]

---

[1] Ένα απλό παράδειγμα συνάλγεβρας είναι η συνάρτηση $Z \xrightarrow{n \mapsto (n-1, n+1)} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

[2] MELL: **M**ultiplicative **E**xponential **L**inear **L**ogic. Αρκούμαστε σε αυτήν τη λογική, αφού, όπως θα δούμε, θα ασχοληθούμε κυρίως με ένα της κομμάτι.

[3] Είναι προφανές πως και ο **NL** αποτελεί υποδομική λογική, αφού στερείται δομικών κανόνων.

[4] Η αντίστροφη γραμμική συνεπαγωγή $\multimapinv$ λειτουργεί με αντίστοιχο τρόπο.

Άρνηση: $^\perp$

Το $A^\perp$ σε γενικές γραμμές συμβολίζει αυτό που θα καταναλώσει έναν πόρο A. Οι πόροι εμφανίζονται κατά ζεύγη, κάπως σαν την ύλη και την αντιύλη. Μία παραγωγή A συναντά μία υπόθεση $A^\perp$ και δεν αφήνει τίποτα. Η άρνηση ενός καταναλωτή ταυτίζεται με την εμφάνιση ενός παραγωγού και αντιστρόφως, έτσι ώστε $A^{\perp\perp} \equiv A$.

Τανυστής (πολλαπλασιαστική σύζευξη): $\otimes$

Το $A \otimes B$ σημαίνει ότι οι πόροι καθιστούν διαθέσιμο και το A και το B. Αν έχουμε έναν πόρο $A \otimes B$, μπορούμε να λάβουμε ταυτόχρονα και το A και το B. Άρα $A \otimes B \nvdash B$.

Παρά (par) (πολλαπλασιαστική διάζευξη): $⅋$

Ο σύνδεσμος *παρά*[5] είναι σχετικά δυσερμήνευτος. Μπορεί να ιδωθεί ως μία επισήμανση ότι $A \multimap B$ μπορεί να οριστεί ως $A^\perp ⅋ B$, δηλαδή ότι είτε έχουμε κάτι το οποίο ζητά να καταναλώσει έναν πόρο A είτε παράγουμε έναν πόρο B. Μπορούμε να παραφράσουμε το $A ⅋ B$ ως *αν δεν έχεις ένα A, τότε έχεις ένα B* και αντιστρόφως.

Με (προσθετική σύζευξη): &

Το $A \mathbin{\&} B$ σημαίνει ότι οι πόροι μας καθιστούν το A διαθέσιμο και μπορούν να καταστήσουν το B διαθέσιμο, αλλά όχι και τα δύο ταυτόχρονα. Με αποδεικτικούς όρους, οι προκείμενες επιτρέπουν μία απόδειξη του A και επιτρέπουν επίσης μία διαχωρισμένη απόδειξη του B. Επειδή, όμως, οι αποδείξεις καταναλώνουν προκείμενες, δεν μπορούμε να διενεργήσουμε τις αποδείξεις μαζί χρησιμοποιώντας μόνο αυτό το σύνολο των προκειμένων. Αυτό ενίοτε ονομάζεται **εσωτερική επιλογή**: επιλέγουμε είτε τη λήψη του A είτε τη λήψη του B.

Συν (προσθετική διάζευξη): $\oplus$

Το $A \oplus B$ σημαίνει ότι οι πόροι καθιστούν είτε το A είτε το B διαθέσιμο, αλλά δε γνωρίζουμε ποιο. Αυτό τιτλοφορείται συνήθως ως **εξωτερική επιλογή**.

Φυσικά: !

Το $!A$ (στα αριστερά του $\vdash$) ερμηνεύεται ως ένας τυχαίος αριθμός εμφανίσεων της φόρμουλας A, όπου επιλέγουμε εμείς πόσες θα είναι οι εμφανίσεις αυτές. Συνεπώς, μπορούμε να παραγάγουμε όσα αντίγραφα του πόρου A θέλουμε συμπεριλαμβανομένων των μηδενικών αντιγράφων.

Γιατί όχι: ?

Το $?A$ (στα αριστερά του $\vdash$) ερμηνεύεται ως μια άγνωστη ποσότητα εμφανίσεων της φόρμουλας A. Επομένως, μπορούμε να καταναλώσουμε όσα αντίγραφα του πόρου A θέλουμε συμπεριλαμβανομένων των μηδενικών αντιγράφων.

Μονάδα: 1

Το ταυτοτικό στοιχείο του τανυστή, δηλαδή $(A \otimes \mathbf{1}) \equiv A$. Η μονάδα είναι ο στοιχειώδης πόρος που μπορεί να παραχθεί αφ'εαυτού. Με άλλα λόγια, εάν μια συλλογή πόρων παράγει το **1** (και τίποτα άλλο), τότε μπορούμε να καταναλώσουμε, να εξοβελίσουμε αυτήν τη συλλογή πόρων.

Κορυφή: $\top$

Το ταυτοτικό στοιχείο του &, έτσι ώστε $(A \mathbin{\&} \top) \equiv A$. Η κορυφή καταναλώνει όλους τους πόρους.

[5]Το par το μεταφράζουμε ως παρά ακολουθώντας την εννοιολογική νύξη του Τροέλστρα [85], ο οποίος το εξηγεί ως σύντμηση της *παράλληλης διάζευξης*.

Αδύνατο: 0

Το ταυτοτικό στοιχείο του $\oplus$, δηλαδή $(A \oplus \mathbf{0}) \equiv A$. Αντιστοιχεί στον αδύνατο πόρο, έτσι ώστε η εξωτερική επιλογή μεταξύ A και $\mathbf{0}$ να δίνει πάντα A. Ισχύει επίσης ότι $\mathbf{0} \equiv \top^{\perp}$. Εφόσον το $\top$ καταναλώνει όλους τους πόρους, το $\mathbf{0}$ παράγει όλους τους πόρους. Από αυτήν τη σκοπιά, μοιάζει με το λογικό ψεύδος, από το οποίο οποιοδήποτε συμπέρασμα μπορεί να προκύψει.

Πυθμένας: $\perp$

Το ταυτοτικό στοιχείο του $\parr$, δηλαδή $(A \parr \perp) \equiv A$. Είναι επίσης το δυϊκό του $\mathbf{1}$, δηλαδή $\mathbf{1}^{\perp} \equiv \perp$.

Οι σύνδεσμοι $\otimes, \parr, \multimap$ μαζί με τα ουδέτερα στοιχεία $\mathbf{1}$ και $\perp$, των $\otimes$ και $\parr$ αντίστοιχα, λέγονται **πολλαπλασιαστικοί**. Οι σύνδεσμοι & και $\oplus$ μαζί με τα ουδέτερα στοιχεία $\top$ και $\mathbf{0}$, των & και $\oplus$ αντίστοιχα, λέγονται **προσθετικοί**. Οι σταθερές ! και ? λέγονται **εκθετικά**.[6]

$$\begin{matrix} \text{πολλαπλασιαστικοί} \\ \text{προσθετικοί} \end{matrix} \quad \rightarrow \left\{ \begin{matrix} \multimap \\ \rightsquigarrow \end{matrix} \right. \wedge \left\{ \begin{matrix} \otimes \\ \& \end{matrix} \right. \vee \left\{ \begin{matrix} \parr \\ \oplus \end{matrix} \right. \top \left\{ \begin{matrix} \mathbf{1} \\ \top \end{matrix} \right. \perp \left\{ \begin{matrix} \perp \\ \mathbf{0} \end{matrix} \right.$$

Πίνακας 3.1: Σύνδεσμοι και σταθερές της γραμμικής λογικής

Παρακάτω (πίνακας 3.2), βλέπουμε τον ακολουθητικό λογισμό για την (προτασιακή) **ILL**.[7] Παρατηρούμε την απουσία της πολλαπλασιαστικής διάζευξης $\parr$. Αυτό συμβαίνει επειδή ο σύνδεσμος αυτός απαιτεί πάνω από μία φόρμουλες στα δεξιά της μπάρας, κάτι το οποίο απαγορεύει η συγκεκριμένη λογική.

$$\frac{}{A \vdash A}\ \text{αξίωμα} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \quad A, \Delta \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash B}\ \text{τομή}$$

$$\frac{\Gamma, A, B, \Delta \vdash C}{\Gamma, B, A, \Delta \vdash C}\ \text{ανταλλαγή}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Delta, B \vdash C}{\Gamma, \Delta, A \multimap B \vdash C}\ \multimap_{\mathcal{L}} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \multimap B}\ \multimap_{\mathcal{R}}$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma, A \otimes B \vdash C}\ \otimes_{\mathcal{L}} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Delta \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash A \otimes B}\ \otimes_{\mathcal{R}}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash C}{\Gamma, A \,\&\, B \vdash C}\ \&_{\mathcal{L}_1} \quad \frac{\Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \,\&\, B \vdash C}\ \&_{\mathcal{L}_2} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \,\&\, B}\ \&_{\mathcal{R}}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \oplus B \vdash C}\ \oplus_{\mathcal{L}} \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \oplus B}\ \oplus_{\mathcal{R}_1} \quad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \oplus B}\ \oplus_{\mathcal{R}_2}$$

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma, !A \vdash B}\ W_{\mathcal{L}} \qquad \frac{\Gamma, !A, !A \vdash B}{\Gamma, !A \vdash B}\ C_{\mathcal{L}}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma, !A \vdash B}\ \text{παραμέληση}_{\mathcal{L}} \qquad \frac{!\Gamma \vdash A}{!\Gamma \vdash !A}\ \text{προβιβασμός}_{\mathcal{L}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, \mathbf{1} \vdash A}\ \mathbf{1}_{\mathcal{L}} \qquad \frac{}{\vdash \mathbf{1}}\ \mathbf{1}_{\mathcal{R}}$$

$$\frac{}{\Gamma, \mathbf{0} \vdash A}\ \mathbf{0}_{\mathcal{L}} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \top}\ \top_{\mathcal{R}}$$

Πίνακας 3.2: Ακολουθητικός λογισμός για τη διαισθητική γραμμική λογική (**ILL**)

[6]Τα εκθετικά ως έννοιες αντιστοιχούν ακριβώς σε αυτές των μονομελών συνδέσμων της τροπικής λογικής.
[7]**ILL**: **I**ntuitionistic **L**inear **L**ogic

Σημείωση Γενικώς, όταν αναφερόμαστε στις λογικές, ακολουθώντας τη βιβλιογραφία, θεωρούμε πάντα πως είναι μηδενικού βαθμού. Όταν ο βαθμός είναι 1 ή 2, η αντίστοιχη λογική συμβολίζεται με έναν δείκτη που υποδεικνύει το βαθμό. Επίσης, σύνηθες είναι να μην αναφέρεται ούτε η απουσία των εκθετικών στη διατύπωση των λογικών, σύμβαση την οποία θα ακολουθήσουμε κι εμείς χάριν απλότητας.

Ένα από τα σημαντικότερα ερωτήματα που θέτουμε σε ένα λογικό σύστημα είναι αν αυτό είναι συνεπές, δηλαδή αν υπάρχουν ακολουθητές που είναι μη αποδείξιμοι στη λογική αυτή. Στον ακολουθητικό λογισμό για τη γραμμική λογική, όπως αποδεικνύουν τόσο ο Ρόορντα [76] όσο και ο Τροέλστρα [85], μπορούμε να απαλείψουμε τον κανόνα της τομής. Αυτό, βέβαια, όπως έχουμε πει και πρωτύτερα, συνεπάγεται ότι το συγκεκριμένο λογικό σύστημα είναι συνεπές, καθώς επίσης ότι ισχύει η ιδιότητα της υποφόρμουλας.

Πριν προχωρήσουμε στη σχέση κατηγοριακών γραμματικών και γραμμικής λογικής, αξίζει να αναφέρουμε ότι η **IMLL** έχει το φυσικό συμπερασμό ως εναλλακτική διατύπωση. Επομένως, ισχύει ο ισομορφισμός Curry-Howard, αν θεωρήσουμε μία σημασιολογικά επισημασμένη εκδοχή του φυσικού συμπερασμού, αντιστοίχως όπως την ορίσαμε στο δεύτερο κεφάλαιο για τον **LP**.

Κανονικοποίηση Η διαισθητική γραμμική λογική είναι ισχυρά κανονικοποιήσιμη, αφού ικανοποιείται η απαλοιφή της τομής. Την απόδειξη αυτού τη διατύπωσε ο Ζιράρ με τη βοήθεια των δικτύων αποδείξεων στο άρθρο όπου εισήγαγε τη γραμμική λογική. Επίσης, στη γραμμική λογική ισχύει η συμβολή, δηλαδή το θεώρημα Church-Rosser, οπότε κάθε απόδειξη έχει μοναδική κανονική μορφή.

3.3 Γραμμική λογική και Λογισμός Λάμπεκ

Ένα από τα κύρια προβλήματα στην εφαρμογή της γραμμικής λογικής στη γλωσσολογία είναι η καθολική διαθεσιμότητα του κανόνα της μετάθεσης. Συνεπώς, αυτός θα πρέπει τουλάχιστον να περιοριστεί, όπως αυτοί της συστολής και της εξασθένισης στη γραμμική λογική.

Ο Αμπρούσι [13], μετά την εμφάνιση της γραμμικής λογικής, διείδε πως ο Λογισμός Λάμπεκ αποτελεί ένα μέρος της. Έτσι, διατύπωσε τον ακολουθητικό λογισμό της μη αντιμεταθετικής διαισθητικής λογικής.[8]

Ορισμός 3.3.1. Η γλώσσα $\mathcal{L}$(**NC-ILL**) του ακολουθητικού λογισμού για τη διαισθητική γραμμική προτασιακή λογική ορίζεται ως εξής:

i. Το **αλφάβητο** της $\mathcal{L}$(**NC-ILL**) αποτελείται από τα ακόλουθα σύμβολα:

- τις προτασιακές μεταβλητές $a, b, c, \ldots$
- τις προτασιακές σταθερές $\mathbf{1}, \top$
- τους μονομελείς συνδέσμους $^{\perp}$(πριν), $^{\perp}$(μετά), !, ?
- τους διμελείς συνδέσμους $\otimes, \&, \oplus, \multimap, \circ\!\!-$
- το ακολουθητικό σύμβολο $\vdash$ και τα συνήθη βοηθητικά σύμβολα

ii. Οι φόρμουλες της $\mathcal{L}$(**NC-ILL**) ορίζονται επαγωγικά ως εξής:

- κάθε προτασιακή μεταβλητή είναι μια φόρμουλα

[8] **NC-ILL**: **N**on-**C**ommutative **I**ntuitionistic **L**inear **L**ogic

- οι $\mathbf{1}$ και $\top$ είναι φόρμουλες
- αν A είναι φόρμουλα, τότε $A^\perp, {}^\perp A, !A, ?A$ είναι φόρμουλες
- αν A και B είναι φόρμουλες, τότε $A \otimes B, A \oplus B, A \,\&\, B, A \multimap B$ και $A \multimapinv B$ είναι φόρμουλες
- τίποτα άλλο δεν είναι φόρμουλα

iii. Οι ακολουθητές της $\mathcal{L}$(**NC-ILL**) ορίζονται ως εξής:

- $\Gamma \vdash A$ και $\Gamma \vdash$ είναι ακολουθητές, όπου Γ πεπερασμένη ακολουθία φορμουλών της γλώσσας $\mathcal{L}$(**NC-ILL**) και A φόρμουλα.

Βασικοί κανόνες

$$\frac{}{A \vdash A}\text{ αξίωμα} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma_1, A, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, \Gamma, \Gamma_2 \vdash \Delta}\text{ τομή}$$

Κανόνες

${}^\perp$(μετά) $$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, A^\perp \vdash}\,{}^\perp(\text{μετά})_\mathcal{L} \qquad \frac{A, \Gamma \vdash}{\Gamma \vdash A^\perp}\,{}^\perp(\text{μετά})_\mathcal{R}$$

${}^\perp$(πριν) $$\frac{\Gamma \vdash A}{{}^\perp A, \Gamma \vdash}\,{}^\perp(\text{πριν})_\mathcal{L} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash}{\Gamma \vdash {}^\perp A}\,{}^\perp(\text{πριν})_\mathcal{R}$$

$\mathbf{1}$ $$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, \mathbf{1} \vdash \Delta}\,\mathbf{1}_{\mathcal{L}_1} \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\mathbf{1}, \Gamma \vdash \Delta}\,\mathbf{1}_{\mathcal{L}_2} \qquad \frac{}{\vdash \mathbf{1}}\,\mathbf{1}_\mathcal{R}$$

$\top$ $$\frac{}{\Gamma \vdash \top}\,\top$$

$\otimes$ $$\frac{\Gamma_1, A, B, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, (A \otimes B), \Gamma_2 \vdash \Delta}\,\otimes_\mathcal{L} \qquad \frac{\Gamma_1 \vdash A \qquad \Gamma_2 \vdash B}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash A \otimes B}\,\otimes_\mathcal{R}$$

$\&$ $$\frac{\Gamma_1, A, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, (A \,\&\, B), \Gamma_2 \vdash \Delta}\,\&_{\mathcal{L}_1} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \,\&\, B}\,\&_\mathcal{R}$$

$$\frac{\Gamma_1, B, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, (A \,\&\, B), \Gamma_2 \vdash \Delta}\,\&_{\mathcal{L}_2}$$

$\oplus$ $$\frac{\Gamma_1, A, \Gamma_2 \vdash \Delta \qquad \Gamma_1, B, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, (A \oplus B), \Gamma_2 \vdash \Delta}\,\oplus_\mathcal{L} \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \oplus B}\,\oplus_{\mathcal{R}_1} \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \oplus B}\,\oplus_{\mathcal{R}_2}$$

$\multimap$ $$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma_1, B, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, \Gamma, (A \multimap B), \Gamma_2 \vdash \Delta}\,\multimap_\mathcal{L} \qquad \frac{A, \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \multimap B}\,\multimap_\mathcal{R}$$

$\multimapinv$ $$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma_1, B, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, \Gamma, (A \multimapinv B), \Gamma_2 \vdash \Delta}\,\multimapinv_\mathcal{L} \qquad \frac{A, \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \multimapinv B}\,\multimapinv_\mathcal{R}$$

$!$ $$\frac{\Gamma_1, A, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, !A, \Gamma_2 \vdash \Delta}\,!_\mathcal{L} \qquad \frac{!\Gamma \vdash A}{!\Gamma \vdash !A}\,!_\mathcal{R} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, !A \vdash \Delta}\,!_\mathcal{W}$$

$$\frac{\Gamma_1, !A, !A, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, !A, \Gamma_2 \vdash \Delta}\,!_\mathcal{C} \qquad \frac{\Gamma_1, !A, !B, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, !B, !A, \Gamma_2 \vdash \Delta}\,!_\mathcal{E}$$

$?$ $$\frac{!\Gamma, A \vdash ?\Delta}{!\Gamma, ?A \vdash ?\Delta}\,?_\mathcal{L} \quad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash ?A}\,?_\mathcal{R} \quad \frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash ?A}\,?_\mathcal{W}$$

Πίνακας 3.3: Ακολουθητικός λογισμός: πλήρης μη αντιμεταθετική διαισθητική προτασιακή γραμμική λογική

Βασιζόμενοι στον ορισμό του Αμπρούσι, οι ασχολούμενοι με τις κατηγοριακές γραμματικές, θεωρούν πως ο **L** ταυτίζεται με ένα μέρος της **NC-ILL**, το πολλαπλασιαστικό και ελεύθερο εκθετικών. Έτσι, ο **L** μπορεί να παρουσιάζεται ως **NC-IMLL**.[9] Ας ορίσουμε, λοιπόν, εκ νέου το Λογισμό Λάμπεκ με όρους γραμμικής λογικής αυτήν τη φορά.[10]

Βασικοί κανόνες

$$\frac{}{A \vdash A}\text{αξίωμα} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma_1, A, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, \Gamma, \Gamma_2 \vdash \Delta}\text{τομή}$$

Κανόνες για το $\otimes$ $(\equiv \bullet)$

$$\frac{\Gamma_1, A, B, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, (A \otimes B), \Gamma_2 \vdash \Delta}\otimes_{\mathcal{L}} \qquad\qquad \frac{\Gamma_1 \vdash A \qquad \Gamma_2 \vdash B}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash A \otimes B}\otimes_{\mathcal{R}}$$

Κανόνες για το $\multimapinv$ $(\equiv /)$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma_1, B, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, \Gamma, (A \multimapinv B), \Gamma_2 \vdash \Delta}\multimapinv_{\mathcal{L}} \qquad\qquad \frac{A, \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \multimapinv B}\multimapinv_{\mathcal{R}}$$

Κανόνες για το $\multimap$ $(\equiv \backslash)$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma_1, B, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, \Gamma, (A \multimap B), \Gamma_2 \vdash \Delta}\multimap_{\mathcal{L}} \qquad\qquad \frac{A, \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \multimap B}\multimap_{\mathcal{R}}$$

Πίνακας 3.4: **L**: Μη αντιμεταθετική πολλαπλασιαστική διαισθητική προτασιακή γραμμική λογική

Ας δούμε μερικά παραδείγματα λογικών τύπων του Λογισμού Λάμπεκ και πώς μεταφράζονται στο λογικό σύστημα που ορίσαμε, ξεκινώντας από τους βασικούς τύπους np, pp και s.

Αμετάβατο ρήμα:	$np\backslash s$	$np \multimap s$
Μεταβατικό μονόπτωτο ρήμα:	$(np\backslash s)/np$	$(np \multimap s) \multimapinv np$
Μεταβατικό δίπτωτο ρήμα:	$((np\backslash s)/np)/pp$	$((np \multimap s) \multimapinv np) \multimapinv pp$
Επίρρημα:	$(np\backslash s)\backslash(np\backslash s)$	$(np \multimap s) \multimap (np \multimap s)$
Πρόθεση:	pp/np	$pp \multimapinv np$

Παράδειγμα 3.3.2. Έστω η πρόταση *ο Γιάννης έδωσε στη Μαρία μία συμβουλή*. Αν θεωρήσουμε ότι

- ο Γιάννης $\rightarrow np$
- έδωσε $\rightarrow ((np \multimap s) \multimapinv np) \multimapinv pp$
- στη Μαρία $\rightarrow pp$
- μία συμβουλή $\rightarrow np$

έχουμε ότι

[9] **NC-IMLL**: **N**on-**c**ommutative **I**ntuitionistic **M**utliplicative **L**inear **L**ogic. Ακριβέστερα, ο **L** ταυτίζεται με την **NC-IMLL***, αφού εξ ορισμού το σύνολο των προκειμένων ενός ακολουθητή δεν μπορεί να είναι κενό.

[10] Τον ορισμό αυτόν τον λαμβάνουμε από την Καζάντιο [30].

$$\dfrac{\dfrac{\text{ο Γιάννης}}{np} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{έδωσε}}{((np \multimap s) \circ\!- np) \circ\!- pp} \quad \dfrac{\text{στη Μαρία}}{pp}}{(np \multimap s) \circ\!- np} \quad \dfrac{\text{μία συμβουλή}}{np}}{np \multimap s}}{s}$$

Μετά την παρουσίαση του **L** στο πλαίσιο της γραμμικής λογικής, μπορούμε να δούμε τον τρόπο με τον όποιο διαμορφώνονται και ο **LP**. Παρατηρούμε ότι εάν αφαιρέσουμε τον περιορισμό της μη αντιμεταθετικότητας, επιστρέφουμε στον **LP** (πίνακας 3.5), ο οποίος αντιστοιχεί στην **IMLL**. Διατυπωμένος με αυτόν τον τρόπο, ο **LP** δεν απαιτεί δύο συνεπαγωγές, αλλά μία, χάρη ακριβώς στον κανόνα της μετάθεσης της κατηγοριακής γραμματικής, δηλαδή του δομικού κανόνα της ανταλλαγής της γραμμικής λογικής. Πράγματι, εφόσον ισχύει ότι $A \otimes B \leftrightarrow B \otimes A$, τότε αποδεικνύεται εύκολα ότι $A \multimap B \leftrightarrow B \circ\!- A$.

Βασικοί κανόνες

$$\dfrac{}{A \vdash A}\ \text{αξίωμα} \qquad\qquad \dfrac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma_1, A, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, \Gamma, \Gamma_2 \vdash \Delta}\ \text{τομή}$$

Δομικοί κανόνες

$$\dfrac{\Gamma, A, B, \Gamma' \vdash C}{\Gamma, B, A, \Gamma' \vdash C}\ \text{μετάθεση}$$

Κανόνες για το $\otimes$ ($\equiv \bullet$)

$$\dfrac{\Gamma_1, A, B, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, (A \otimes B), \Gamma_2 \vdash \Delta}\ \otimes_{\mathcal{L}} \qquad\qquad \dfrac{\Gamma_1 \vdash A \qquad \Gamma_2 \vdash B}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash A \otimes B}\ \otimes_{\mathcal{R}}$$

Κανόνες για το $\multimap$ ($\equiv \backslash$)

$$\dfrac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma_1, B, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, \Gamma, (A \multimap B), \Gamma_2 \vdash \Delta}\ \multimap_{\mathcal{L}} \qquad\qquad \dfrac{A, \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \multimap B}\ \multimap_{\mathcal{R}}$$

Πίνακας 3.5: **LP**: Πολλαπλασιαστική διαισθητική γραμμική λογική

Όπως θα παρατηρήθηκε, τα μελετώμενα λογικά συστήματα δεν περιέχουν προσθετικούς συνδέσμους, μοναδιαία στοιχεία και εκθετικά. Το γεγονός αυτό οφείλεται κυρίως στην ανάγκη απλούστευσης των συστημάτων, έτσι ώστε να αυξάνεται η ευχρηστία τους, και όχι στο ότι αυτά τα επιπλέον σύμβολα δεν έχουν γλωσσολογική αξία.

Προσθετικοί σύνδεσμοι

Σύμφωνα με το Μόοτ, *η πρωτότυπη γλωσσολογική χρησιμότητα των προσθετικών συνδέσμων θα ήταν η περίπτωση της λεξικής αμφισημίας* [62]. Δηλαδή, δοθείσης μιας λέξης στην οποία αντιστοιχούν δύο φόρμουλες, έστω A, B, μπορούμε να της αποδώσουμε μόνο μία: την $A \& B$. Έτσι, μεταφέρουμε την αμφισημία από το λεξικό στο λογικό μας σύστημα. Παραδείγματος χάρη, το ρήμα *πιστεύω* μπορεί κατά περίπτωση να εκφράζει μια σχέση είτε μεταξύ δύο προσώπων είτε μεταξύ ενός προσώπου και μιας δήλωσης, όπου στη γραμματική μας ερμηνεύεται ως πρόταση s:

(1) Ο Πέτρος πιστεύει τον Κώστα.

(2) Ο Πέτρος πιστεύει ότι ο Κώστας τον εμπιστεύεται.

Μπορούμε να αντιστοιχήσουμε στο ρήμα δύο τύπους

- πιστεύει $\to np \multimap (np \multimap s)$
- πιστεύει $\to s \multimap (np \multimap s)$

ή να επωφεληθούμε του προσθετικού συνδέσμου και να έχουμε

- πιστεύει $\to np \multimap (np \multimap s) \,\&\, s \multimap (np \multimap s)$.

Χρησιμοποιώντας τώρα το θεώρημα $(A \multimap C) \,\&\, (B \multimap C) \vdash (A \oplus B) \multimap C$, καταλήγουμε σε μία συμπαγέστερη λεξικολογική καταχώρηση για το δοθέν ρήμα:

- πιστεύει $\to (s \oplus np) \multimap (np \multimap s)$.

Συνεπώς, οι προσθετικοί σύνδεσμοι μπορούν να μας διευκολύνουν γεφυρώνοντας το χάσμα μεταξύ του λεξικού και του συστήματος λογικής που υιοθετούμε, αλλά δεν κρίνεται απαραίτητη η παρουσία τους, γι'αυτόν το λόγο εκλείπουν από τις διατυπώσεις των κατηγοριακών γραμματικών με όρους γραμμικής λογικής.

Μοναδιαία στοιχεία

Σύμφωνα ξανά με τον Μόοτ [62], η μονάδα (**1**) της γραμμικής λογικής μπορεί να χρησιμεύσει σε ένα φαινόμενο που απαντάται και στην ελληνική γλώσσα: αυτό της παράλειψης της προσωπικής αντωνυμίας, όπως είδαμε στο δεύτερο κεφάλαιο της εργασίας. Αν έχουμε το ρήμα *υπάρχω*, τότε μπορούμε να πούμε ότι έχει τον τύπο $(np \multimap s) \,\&\, s$. Αν εφαρμόσουμε πάλι το θεώρημα που προαναφέραμε έχουμε ότι

$$\text{υπάρχω} \to (np \multimap s) \,\&\, s = (np \oplus 1) \multimap s.$$

Η γενική μέθοδος που ακολουθούμε εδώ συνίσταται στο ότι η φόρμουλα $A \oplus \mathbf{1}$ αναπαριστά ένα *προαιρετικό* όρισμα τύπου A. Συνεπώς, όταν θα υπάρχουν πολλά προαιρετικά ορίσματα, η συγκεκριμένη αναπαράσταση αυτών καθίσταται οικονομικότερη από την περίπτωση όπου δε θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τις σταθερές που μας παρέχει η γραμμική λογική. Παρόλη τη χρησιμότητά τους, ούτε τα μοναδιαία στοιχεία εμφανίζονται στις διατυπώσεις των κατηγοριακών γραμματικών εντός των συμφραζομένων της γραμμικής λογικής.

Σημείωση Αξίζει να αναφερθεί ότι αρκετές έρευνες της σχέσης Λογισμού Λάμπεκ και γραμμικής λογικής, όπου αναλύονται διεξοδικά πολλές πτυχές του ζητήματος αυτού, έχουν εκπονηθεί από το Ρετορέ [73][74].

3.4 Από τη διαισθητική στην κλασική γραμμική λογική

Η διαισθητική γραμμική λογική υπήρξε η νέα «γλώσσα» των κατηγοριακών γραμματικών. Γρήγορα όμως, ανέκυψε η ανάγκη μετάβασης στην κλασική γραμμική λογική και ξανά πίσω στη διαισθητική, έτσι ώστε να υπάρχει μια ισχυρή θεμελίωση των δικτύων αποδείξεων που σχετίζονται με αυτήν. Θα δούμε πρώτα αυτήν τη μετάβαση για να μπορέσουμε να κατανοήσουμε καλύτερα τα δίκτυα αποδείξεων.[11]

Λαμβάνουμε, λοιπόν, το αλφάβητο της $\mathcal{L}$(**NC-ILL**), όπως το ορίσαμε στην προηγούμενη ενότητα και προχωράμε στην ανάπτυξη της **NC-MLL**, δηλαδή της πολλαπλασιαστικής μη αντιμεταθετικής (κλασικής) γραμμικής λογικής. Εφόσον επιστρέφουμε στην κλασική

[11] Υιοθετούμε τη μετάβαση την οποία ακολουθεί η Καζάντιο [30], δηλαδή από τον **L** στην **NC-MLL**. Οι Ρετορέ και Λαμάρς [50] ακολουθούν την οδό από τον **LP** στην **MLL**.

λογική, δεν υφίσταται πια ο περιορισμός της διαισθητικής λογικής: τώρα επιτρέπονται παραπάνω από μία φόρμουλες στα δεξιά της μπάρας. Επίσης, ισχύουν οι κλασικοί λογικοί νόμοι, όπως αυτοί του Ντε Μόργκαν και της διπλής άρνησης, αν και ο τελευταίος είναι λίγο διαφοροποιημένος λόγω των δύο ειδών άρνησης που διαθέτουμε. Έχουμε τον ακόλουθο ορισμό του ακολουθητή στο μονοπλευρικό ακολουθητικό λογισμό:

$\vdash \Gamma$ είναι ένας ακολουθητής αν και μόνο αν η Γ είναι μία πεπερασμένη ακολουθία φορμουλών του **NC-MLL**.

Ένα βασικό χαρακτηριστικό της μη αντιμεταθετικής γραμμικής λογικής είναι η παρουσία δύο αρνήσεων:

- μεταάρνηση του $A \equiv A^{\perp}$
- προάρνηση του $A \equiv {}^{\perp}A$

Οι φόρμουλες του **NC-MLL** ορίζονται ως εξής:

- κάθε προτασιακή μεταβλητή είναι μία φόρμουλα του **NC-MLL**
- αν A φόρμουλα της **NC-MLL**, τότε $A^{\perp}, {}^{\perp}A$ φόρμουλες του **NC-MLL**
- αν A και B φόρμουλες της **NC-MLL**, τότε $A \otimes B$ φόρμουλα του **NC-MLL**
- αν A και B φόρμουλες της **NC-MLL**, τότε $A \parr B$ φόρμουλα του **NC-MLL**
- τίποτα άλλο δεν αποτελεί φόρμουλα της **NC-MLL**.

Οι φόρμουλες που περιέχουν τις δύο συνεπαγωγές $\multimap$ και $\multimapinv$ της **NC-IMLL**, οι οποίες, όπως δείξαμε, αντιστοιχούν στους συνδέσμους \ και / του **L**, μπορούν να μεταφραστούν σε φόρμουλες του **NC-MLL** που περιέχουν το σύνδεσμο $\parr$ και μία από τις δύο αρνήσεις. Αν A, B φόρμουλες, τότε ισχύουν τα

L	**NC-IMLL**	**NC-MLL**
$A \backslash B$	$A \multimap B$	$A^{\perp} \parr B$
B/A	$B \multimapinv A$	$B \parr {}^{\perp}A$

Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό της **NC-MLL** είναι η συμμετρική αρχιτεκτονική της, όπου ισχύον οι νόμοι Ντε Μόργκαν για τα δυϊκά σύνολα των συνδέσμων και ειδικότερα για τους πολλαπλασιαστικούς συνδέσμους παρά ($\parr$) και επί ($\otimes$):

Νόμοι Ντε Μόργκαν

$(A \parr B)^{\perp} = B^{\perp} \otimes A^{\perp} \quad {}^{\perp}(A \parr B) = {}^{\perp}B \otimes {}^{\perp}A$

$(A \otimes B)^{\perp} = B^{\perp} \parr A^{\perp} \quad {}^{\perp}(A \otimes B) = {}^{\perp}B \parr {}^{\perp}A$

Η άρνηση στις φόρμουλες A, B προκαλεί αφενός την αλλαγή του συνδέσμου στο δυϊκό του και αφετέρου την αναδιάταξη των φορμουλών. Μέσα σε έναν ακολουθητή λειτουργεί ως εξής:

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A^{\perp}, \Delta}\,()^{\perp} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{{}^{\perp}A, \Gamma \vdash \Delta}\,{}^{\perp}() \qquad \frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, {}^{\perp}B}\,{}^{\perp}() \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma, B^{\perp} \vdash \Delta}\,()^{\perp}$$

Ως αποτέλεσμα, τώρα, των ιδιοτήτων των δύο αρνήσεων στην **NC-MLL**, ο λογικός νόμος της διπλής άρνησης ισχύει μόνο για συμμετρικές αρνήσεις, απαγορεύοντας τη φόρμουλα με διπλή άρνηση ${}^{\perp\perp}A, A^{\perp\perp}$ να αναχθεί στην αρχική A:

Νόμοι διπλής άρνησης

$^{\perp}(A^{\perp}) \leftrightarrow (^{\perp}A)^{\perp} \leftrightarrow A$

$^{\perp\perp}(A) \not\leftrightarrow (A)^{\perp\perp} \not\leftrightarrow A$

Μπορούμε τώρα να ορίσουμε το μονοπλευρικό ακολουθητικό λογισμό για την **NC-MLL**.

$$\dfrac{}{\vdash A^{\perp}, A}\ \text{αξίωμα}$$

$$\dfrac{\vdash \Gamma, A, \Gamma' \qquad \vdash A^{\perp}, \Delta}{\vdash \Gamma, \Delta, \Gamma'}\ \text{τομή}_1 \qquad \dfrac{\vdash \Gamma, A \qquad \vdash \Delta, A^{\perp}, \Delta'}{\vdash \Delta, \Gamma, \Delta'}\ \text{τομή}_2$$

$$\dfrac{\vdash \Gamma, A, \Gamma' \qquad \vdash B, \Delta}{\Gamma, A \otimes B, \Delta, \Gamma'}\ \otimes_1 \qquad \dfrac{\vdash \Gamma, A \qquad \vdash \Delta, B, \Delta'}{\vdash \Delta, \Gamma, A \otimes B, \Delta'}\ \otimes_2$$

$$\dfrac{\vdash \Gamma, A, B}{\Gamma, A \parr B}\ \parr$$

Πίνακας 3.6: Μονοπλευρικός ακολουθητικός λογισμός για την **NC-MLL**

Στη λογική που μόλις περιγράψαμε ενυπάρχει και ο κανόνας της κυκλικής ανταλλαγής

$$\dfrac{\vdash \Gamma, A}{\vdash A, \Gamma}\ \text{κυκλική ανταλλαγή}$$

Σύμφωνα με το Ζιράρ, *ο φυσικός τρόπος για να εισαγάγουμε τη μη αντιμεταθετικότητα δεν είναι η αποβολή του κανόνα της ανταλλαγής, αλλά ο περιορισμός του σε κυκλικές μεταθέσεις* [42]. Έτσι, η λογική αυτή είναι γνωστή και ως κυκλική πολλαπλασιαστική γραμμική λογική. Πρωτοδιατυπώθηκε από τον Γέτερ [89] και συμβολίζεται ως **CyMLL**. Εάν, τώρα, σε αυτήν τη λογική προσθέσουμε τον κανόνα της ανταλλαγής με εναλλαγή[12]

$$\dfrac{\vdash \Gamma, A, B, \Delta}{\vdash \Gamma, B, A, \Delta}\ \text{ανταλλαγή με εναλλαγή}$$

οδηγούμαστε στην (αντιμεταθετική) πολλαπλασιαστική γραμμική λογική, την οποία συμβολίζουμε ως **MLL**. Ας δούμε ένα παράδειγμα για να κατανοήσουμε πώς λειτουργεί η **CyMLL**.

Παράδειγμα 3.4.1. Έστω η πρόταση *ο ψαράς ψαρεύει ψάρια*. Θεωρούμε ενιαίο το έναρθρο ουσιαστικό και έχουμε:

μ.ρήμα: ψαρεύει $\quad np^{\perp} \parr s \parr^{\perp} n \vdash np^{\perp} \parr s \parr^{\perp} n \quad$ ή $\quad$ ψαρεύει $\vdash np^{\perp} \parr s \parr^{\perp} n$

Μπορούμε, χάριν ευκολίας, να αντικαταστήσουμε το $\parr$ με κόμμα, οπότε θα έχουμε:

μεταβατικό ρήμα: $\vdash$ ψαρεύει$^{\perp}, np^{\perp}, s, {}^{\perp}np$

Αντίστοιχα αποτελέσματα θα λάβουμε για τις άλλες λέξεις. Συνεπώς, λαμβάνουμε:

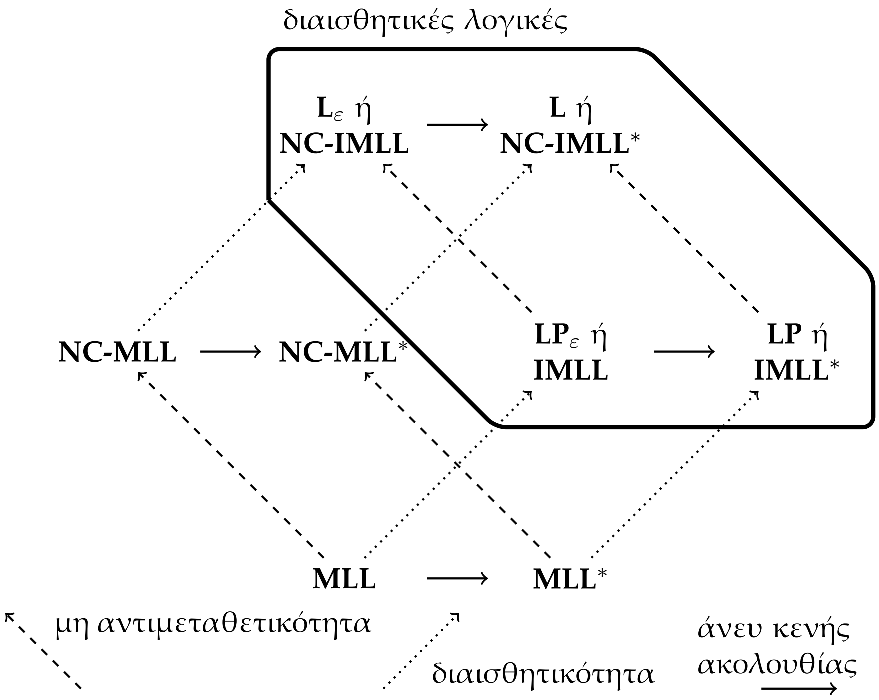
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash \text{ο-ψαράς}^{\perp}, np \qquad \vdash \text{ψαρεύει}^{\perp}, np^{\perp}, s, {}^{\perp}np}{\vdash \text{ψαρεύει}^{\perp}, \text{ο-ψαράς}^{\perp}, s, {}^{\perp}np}\ \text{τομή} \qquad \vdash \text{ψάρια}^{\perp}, n}{\vdash \text{ψάρια}^{\perp}, \text{ψαρεύει}^{\perp}, \text{ο-ψαράς}^{\perp}, s}\ \text{τομή}}{\text{ο-ψαράς, ψαρεύει, ψάρια} \vdash s}$$

[12]Χρησιμοποιούμε τον όρο *εναλλαγή* για την αγγλική λέξη *transposition* και όχι τον όρο αντιμετάθεση, γιατί ο τελευταίος έχει δεσμευθεί από τη λέξη *commutativity*.

Στον πίνακα 3.7 και, εποπτικά, στο σχήμα 3.1, ανακεφαλαιώνουμε αυτά που διαπιστώσαμε για τη σχέση των (διαισθητικών) κατηγοριακών γραμματικών και της γραμμικής λογικής: κλασικής και διαισθητικής. Συμβολίζουμε με $\not\varepsilon$, όπου δεν υπάρχει ταυτολογία, δηλαδή κάθε ακολουθητής έχει κατ' ελάχιστο δύο συμπεράσματα.[13]

διαισθ.	μη αντιμ.	$\not\varepsilon$	όν. γραμ. λογ.	όν. κατ. γραμ.
✔	✔	✔	**NC-IMLL***	**L**
✔	✔	✗	**NC-IMLL**	$\mathbf{L}_\varepsilon$
✔	✗	✔	**IMLL***	**LP**
✔	✗	✗	**IMLL**	$\mathbf{LP}_\varepsilon$
✗	✔	✔	**NC-MLL***	
✗	✔	✗	**NC-MLL**	
✗	✗	✔	**MLL***	
✗	✗	✗	**MLL**	

Πίνακας 3.7: Γραμμική λογική και κατηγοριακές γραμματικές



Σχήμα 3.1: Γραμμική λογική και κατηγοριακές γραμματικές

Οι κλασικές μορφές των γραμμικών λογικών που παρουσιάσαμε δεν έχουν βέβαια αντιστοιχία σε κάποια κατηγοριακή γραμματική, αφού, όπως έχουμε πει, οι κατηγοριακές γραμματικές αποτελούν ασθενείς διαισθητικές λογικές. Αυτό, όμως, δε μας εμποδίζει να χρησιμοποιήσουμε τις κλασικές μορφές, καθώς, αφενός μοιράζονται εγγενείς συμμετρίες (κανόνες Ντε Μόργκαν) και αφετέρου εξομαλύνουν την οδό από τα κλασικά στα διαισθητικά δίκτυα αποδείξεων.

Ας επιστρέψουμε στο παράδειγμα 3.4.1, όπου είδαμε μια παραγωγή της πρότασης *ο ψαράς ψαρεύει ψάρια*. Αυτή η πρόταση έχει άλλη μία παραγωγή:

[13]Τα συγκεντρωτικά αυτά στοιχεία τα λαμβάνουμε από το [73].

$$\dfrac{\vdash \text{ο-ψαράς}^{\perp}, np \qquad \dfrac{\vdash \text{ψαρεύει}^{\perp}, np^{\perp}, s, {}^{\perp}np \qquad \vdash \text{ψάρια}^{\perp}, n}{\vdash \text{ψάρια}^{\perp}, \text{ψαρεύει}^{\perp}, n^{\perp}, s}\,\text{τομή}}{\dfrac{\vdash \text{ψάρια}^{\perp}, \text{ψαρεύει}^{\perp}, \text{ο-ψαράς}^{\perp}, s}{\text{ο-ψαράς, ψαρεύει, ψάρια} \vdash s}}\,\text{τομή}$$

Αυτό συμβαίνει διότι χρησιμοποιούμε την τομή με δύο τρόπους: την πρώτη φορά αριστερά του ρήματος και τη δεύτερη δεξιά. Ο ακολουθητικός λογισμός, όμως, έχει την ιδιότητα της απαλοιφής της τομής,[14] άρα αυτή η πλασματική αμφισημία παύει να υπάρχει.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash n, {}^{\perp}n \qquad \dfrac{\dfrac{\vdash s, {}^{\perp}s \qquad \vdash np^{\perp}, np}{\vdash np^{\perp}, s, ({}^{\perp}s \otimes np)}\,\otimes_2}{\vdash (s \otimes np^{\perp\perp}), np^{\perp}, s}\,()^{\perp\perp}}{\vdash (n \otimes s^{\perp} \otimes np^{\perp\perp}), np^{\perp}, s, {}^{\perp}n}\,\otimes_1}{\vdash (np^{\perp} \parr s \parr^{\perp} n \vdash np^{\perp}, s, {}^{\perp}n}\,{}^{\perp}(1)}{np, (np^{\perp} \parr s \parr^{\perp} n), n \vdash s}\,{}^{\perp}(1)(3)^{\perp}}{\text{ο-ψαράς, ψαρεύει, ψάρια} \vdash s}$$

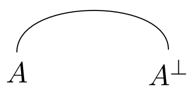
Τα δίκτυα αποδείξεων έχουν την ιδιότητα να αναπαριστούν ταυτόχρονα όλες τις ισοδύναμες παραγωγές χωρίς να χρειάζεται να επιστρατεύσουμε την απαλοιφή της τομής. Πώς γίνεται αυτό, θα το δούμε στην ενότητα που ακολουθεί.

3.5 Δίκτυα αποδείξεων

Στην ερώτηση «ποια είναι η καθαρή, γεωμετρική δομή μιας απόδειξης» υπάρχει μια αρκετά καλή απάντηση στην περίπτωση, παραδείγματος χάρη, της διαισθητικής λογικής με συνεπαγωγή: είναι η δομή του φυσικού συμπερασμού κατά Prawitz. Για τη γραμμική λογική υπάρχει μια διαφορετική απάντηση: η γεωμετρία των αποδείξεων δίνεται από την έννοια του δικτύου απόδειξης. Αρχικά, ορίζουμε τα δίκτυα αποδείξεων εντός της **MLL**.[15]

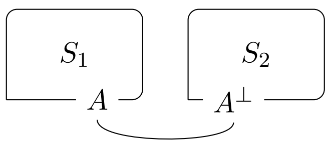
Ορισμός 3.5.1 (Δίκτυο απόδειξης)**.** Το σύνολο των δικτύων απόδειξης ορίζεται επαγωγικά:

Αξίωμα Αν A φόρμουλα της **MLL**, τότε το ακόλουθο είναι ένα **δίκτυο απόδειξης** με συμπεράσματα $A, A^{\perp}$:



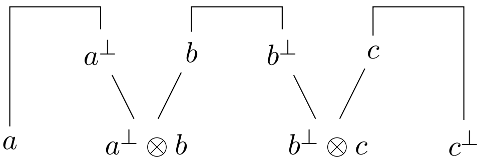
Η σύνδεση του αξιώματος είναι συμμετρική, οπότε η σειρά των συμπερασμάτων δε μας αφορά.

Τομή Έστω S_1 δίκτυο απόδειξης με συμπέρασμα A και S_2 δίκτυο απόδειξης με συμπέρασμα $A^{\perp}$. Τότε μπορούμε να τα συνδυάσουμε με μία σύνδεση τομής ως ακολούθως:



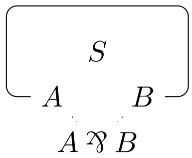
[14]Το θεώρημα απαλοιφής της τομής για την **NC-MLL** έχει αποδειχθεί από τον Αμπρούσι [14].
[15]Τους ορισμούς τούς λαμβάνουμε από το [62].

Όπως και η σύνδεση του αξιώματος, η σύνδεση της τομής είναι συμμετρική.



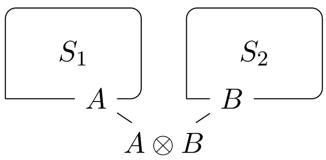
Δίκτυο απόδειξης του ακολουθητή $\vdash a, a^\perp \otimes b, b^\perp \otimes c, c^\perp$

Παρά Έστω S ένα δίκτυο απόδειξης με συμπεράσματα A, B. Τότε μπορούμε να δημιουργήσουμε μία σύνδεση $\parr$ σε αυτό ως ακολούθως:



Η σειρά των φορμουλών A, B παίζει ρόλο, καθώς καθορίζει εάν το συμπέρασμα του νέου δικτύου απόδειξης είναι $A \parr B$ ή $B \parr A$.

Τανυστής Έστω S_1 δίκτυο απόδειξης με συμπέρασμα A και S_2 δίκτυο απόδειξης με συμπέρασμα B. Τότε μπορούμε να τα συνδυάσουμε με μία σύνδεση τανυστή ως εξής:



Όπως και στη σύνδεση του $\parr$, η σειρά των A, B σε σχέση με τη σύνδεση του τανυστή παίζει ρόλο.

Δεν υπάρχει ανάγκη να ερμηνεύσουμε τον κανόνα της ανταλλαγής, αφού το απώτερο νόημά του είναι ότι δεν υπάρχει συγκεκριμένη διάταξη των συμπερασμάτων ενός ακολουθητή.

Θεώρημα 3.5.2. *Κάθε δίκτυο απόδειξης της **MLL** αντιστοιχεί σε τουλάχιστον μία απόδειξη του ακολουθητικού λογισμού της **MLL**.*

Απόδειξη. Η απόδειξη βρίσκεται στο [72]. □

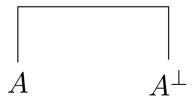
Το ερώτημα που τίθεται, λοιπόν, έχει ως εξής: δοθείσης μιας σειράς φορμουλών, υπάρχει δίκτυο απόδειξης, το οποίο θα έχει αυτές τις φόρμουλες ως συμπέρασμα;

Ορισμός 3.5.3 (Δομή απόδειξης)**.** Μία **δομή απόδειξης** $\langle S, \mathcal{L} \rangle$ αποτελείται από ένα σύνολο S φορμουλών και ένα σύνολο $\mathcal{L}$ συνδέσεων στο S, όπου οι συνδέσεις είναι όπως στον πίνακα 3.8. Επίσης, μια δομή απόδειξης πρέπει να ικανοποιεί τα ακόλουθα:

- κάθε φόρμουλα είναι το πολύ μία φορά προκείμενη μίας σύνδεσης,
- κάθε φόρμουλα είναι ακριβώς μία φορά συμπέρασμα μίας σύνδεσης.

Οι φόρμουλες που δεν είναι προκείμενες καμίας σύνδεσης λέγονται **συμπεράσματα** της δομής απόδειξης.

Αξίωμα

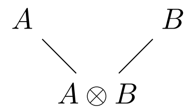


Προκείμενες: Καμία
Συμπεράσματα: $A, A^{\perp}$

Τομή

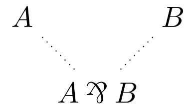
Προκείμενες: $A, A^{\perp}$
Συμπεράσματα: Κανένα

Τανυστής



Προκείμενες: A, B
Συμπεράσματα: $A \otimes B$

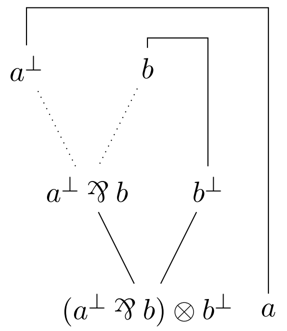
Παρά



Προκείμενες: A, B
Συμπεράσματα: $A \parr B$

Πίνακας 3.8: Συνδέσεις της **MLL**

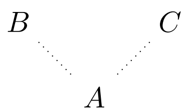
Είναι προφανές ότι δεν είναι όλες οι δομές απόδειξης δίκτυα απόδειξης. Επί παραδείγματι, δεδομένου ότι ο ακολουθητής $\vdash (a^{\perp} \parr b) \otimes b^{\perp}$ δεν είναι αποδείξιμος, η δομή απόδειξης



δεν αποτελεί δίκτυο απόδειξης. Άρα, χρειαζόμαστε ένα κριτήριο που θα μας επιτρέπει να αναγνωρίζουμε τα δίκτυα απόδειξης μεταξύ των διαφόρων δομών απόδειξης.

Ορισμός 3.5.4. Δοθείσης μιας δομής απόδειξης S, μία **διαλλαγή** είναι μία απεικόνιση ω από το σύνολο των κόμβων $\parr$ στο σύνολο {αριστερά,δεξιά}, δηλαδή η διαλλαγή επιλέγει μία σύνδεση παρά μία από τις προκείμενές του.

Ορισμός 3.5.5. Έστω S αποδεικτική δομή και ω διαλλαγή. Τότε λαμβάνουμε ένα διορθωτικό γράφημα ωS αντικαθιστώντας όλες τις συνδέσεις παρά

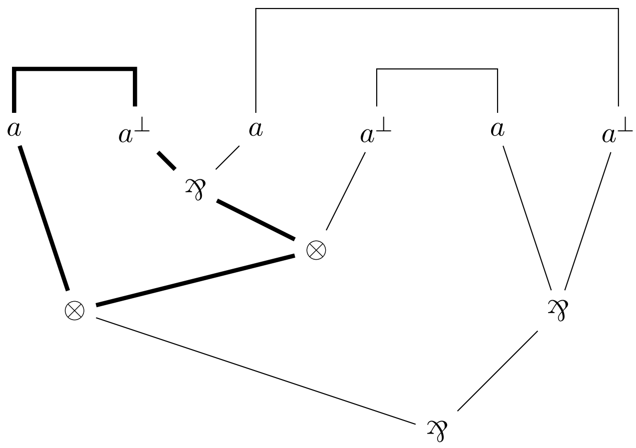


μία από τις κάτωθι συνδέσεις

ανάλογα με την προκείμενη της σύνδεσης που επέλεξε ο ω.

Θεώρημα 3.5.6. *Μία αποδεικτική δομή είναι αποδεικτικό δίκτυο αν και μόνο αν όλα τα διορθωτικά γραφήματά της είναι άκυκλα*[16] *και συνδεδεμένα.*

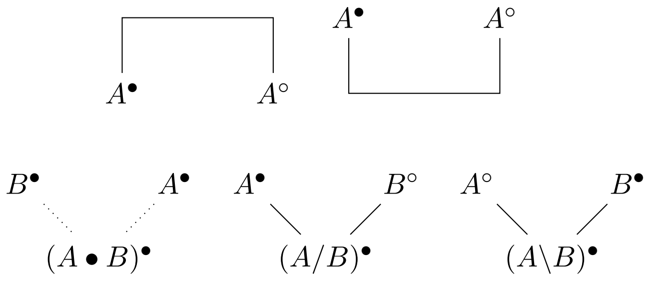
Παραδείγματος χάρη, η αποδεικτική δομή



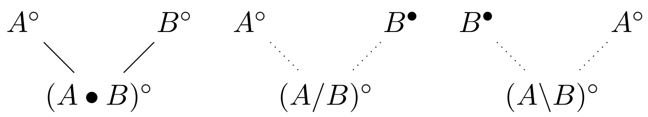
δεν είναι δίκτυο απόδειξης και αυτό συμβαίνει για δύο λόγους: κάθε διαλλαγή που αφαιρεί το δεξί κλαδί πάνω από τον αριστερό ⅋-κόμβο θα αποφέρει έναν κύκλο. Επιπλέον, οποιαδήποτε διαλλαγή που θα αφαιρέσει το δεξί κλαδί πάνω από το δεξιότερο ⅋-κόμβο θα καταστήσει το γράφημα ασύνδετο.

Ας δούμε, τώρα, πώς εφαρμόζεται η θεωρία των δικτύων αποδείξεων στον ίδιο το Λογισμό Λάμπεκ. Ο πρώτος που προσάρμοσε τα δίκτυα αποδείξεων, όπως αυτά ορίστηκαν από το Ζιράρ [40], στον **L** ήταν ο Ρόορντα [76]. Πρώτα, πρέπει να δούμε πώς μεταφράζονται οι διαισθητικές σε κλασικές φόρμουλες. Για τη μετάφραση αυτή απαιτείται η έννοια της πολικότητας.

Ορισμός 3.5.7. Μία **πολική φόρμουλα** είναι ένας κατηγοριακός τύπος του **L**, στον οποίο έχει αποδοθεί πολικότητα. Υπάρχουν δύο πολικότητες: **εισροής** ($^\bullet$), η οποία θεωρείται αρνητική και αναφέρεται στις φόρμουλες αριστερά της μπάρας και **εκροής** ($^\circ$), η οποία θεωρείται θετική και αναφέρεται στις φόρμουλες δεξιά της μπάρας. Ένα δένδρο πολικών φορμουλών είναι ένα διμελές διατεταγμένο δένδρο, στου οποίου τα φύλλα έχουν αποδοθεί πολικά άτομα και κάθε τοπικό δένδρο είναι ένα από τις ακόλουθες συνδέσεις.

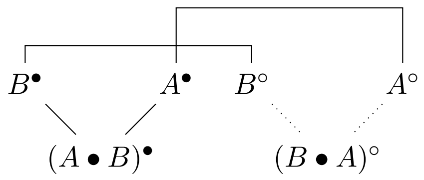


[16]Ένα κατευθυντό γράφημα είναι **άκυκλο** αν δεν περιέχει κατευθυντούς κύκλους.



Η μη αντιμεταθετικότητα του **L** στα δίκτυα αποδείξεων μεταφράζεται ως απαίτηση τα παραγόμενα γραφήματα να είναι **επιπεδικά**.[17]

Παρατήρηση Ένα παράδειγμα όπου μπορούμε να δούμε την απαίτηση που φέρει η αντιμεταθετικότητα είναι να δούμε ένα μη θεώρημα του **L**: $A \bullet B \nvdash B \bullet A$. Υπάρχει μόνο μία δομή απόδειξης του ακολουθητή, η οποία δεν είναι επιπεδική.



Θεώρημα 3.5.8 (Roorda [76])**.** *Ένα δίκτυο απόδειξης είναι έγκυρο εντός του **L**, αν και μόνο αν*

- *όλα τα διορθωτικά γραφήματά του είναι άκυκλα και συνδεδεμένα*
- *όλες οι συνδέσεις αξιώματος είναι επιπεδικές.*

Έχουμε,τώρα, τις ακόλουθες μεταφράσεις

- $(A)^\circ = A^\circ$, αν A° είναι ατομική φόρμουλα
- $(A\backslash B)^\circ = B^\circ \parr A^\bullet$
- $(A/B)^\circ = B^\bullet \parr A^\circ$
- $(A \bullet B)^\circ = B^\circ \otimes A^\circ$
- $(A)^\bullet = A^\bullet$, αν A° είναι ατομική φόρμουλα
- $(A\backslash B)^\bullet = A^\circ \otimes B^\bullet$
- $(A/B)^\bullet = A^\bullet \otimes B^\circ$
- $(A \bullet B)^\bullet = A^\bullet \parr B^\bullet$

οι οποίες επιτρέπουν τη μετατροπή οποιουδήποτε διαισθητικού ακολουθητή $A_0, ..., A_n \vdash B$ του **L** σε μια ακολουθία $A_0{}^\bullet, ..., A_n{}^\bullet, B^\circ$ φορμουλών της μη αντιμεταθετικής πολλαπλασιαστικής γραμμικής λογικής.

Πρόταση 3.5.9. *Ένας ακολουθητής είναι αποδείξιμος εντός του **L** αν και μόνο αν υπάρχει το αντίστοιχο δίκτυο απόδειξής του.*

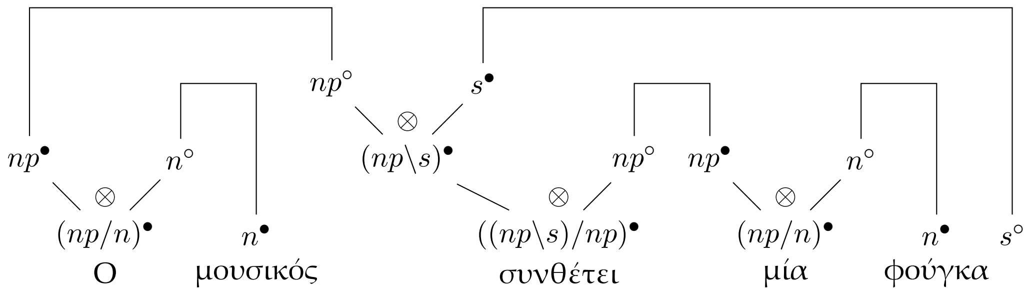
Απόδειξη. Η απόδειξη βρίσκεται στο [22]. □

Παράδειγμα 3.5.10. Έστω η πρόταση *ο μουσικός συνθέτει μία φούγκα*. Η παραγωγή της πρότασης είναι

[17]Ένα γράφημα λέγεται **επιπεδικό**, αν μπορεί να αποτυπωθεί στο επίπεδο χωρίς να διασταυρώνονται οι ακμές του.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{n\vdash n}\,\text{αξ}\quad \dfrac{}{np\vdash np}\,\text{αξ}}{np/n, n\vdash np}\,/\mathcal{L}\quad \dfrac{}{s\vdash s}\,\text{αξ}}{np/n,n,np\backslash s\vdash s}\,\backslash\mathcal{L}\quad \dfrac{\dfrac{}{n\vdash n}\,\text{αξ}\quad\dfrac{}{np\vdash np}\,\text{αξ}}{np/n,n\vdash np}\,/\mathcal{L}}{np/n,n,np\backslash s/np,np/n,n\vdash s}\,/\mathcal{L}$$

και το δίκτυο απόδειξης είναι

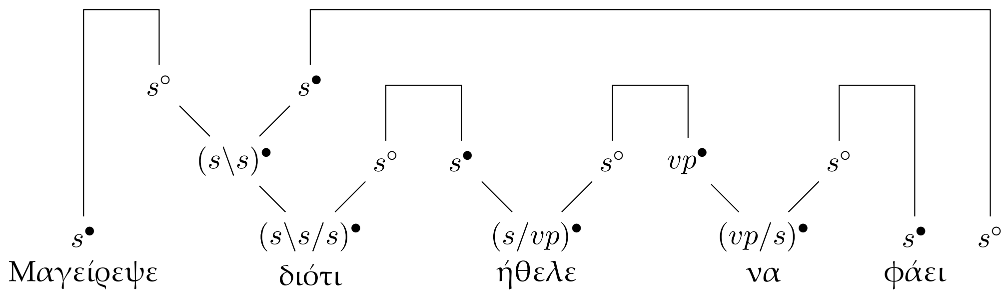


Βλέπουμε πόσο εύκολα προκύπτει το δίκτυο απόδειξης, το οποίο αποσαφηνίζει την εκάστοτε παραγωγή. Ας δούμε, τώρα, άλλο ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 3.5.11. Έστω η πρόταση *μαγείρεψε διότι ήθελε να φάει*. Η παραγωγή είναι

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{s\vdash s}\,\text{αξ} \quad \dfrac{}{s\vdash s}\,\text{αξ}}{s,s\backslash s\vdash s}\,\backslash\mathcal{L}\quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{s\vdash s}\,\text{αξ}\quad\dfrac{}{vp\vdash vp}\,\text{αξ}}{vp/s,s\vdash vp}\,/\mathcal{L}\quad \dfrac{}{s\vdash s}\,\text{αξ}}{s,vp,vp/s,s\vdash s}\,/\mathcal{L}}{s,s\backslash s/s,s/vp/vp/s,s\vdash s}\,/\mathcal{L}$$

και το δίκτυο απόδειξης είναι



Μπορούμε να παραλείψουμε την επισήμανση των συνδέσεων, καθώς όλες είναι πάλι συνδέσεις τανυστή.

Σημείωση Οι λογικές με δίκτυα απόδειξης είναι ισχυρά κανονικοποιήσιμες. Αυτό σημαίνει ότι κάθε δίκτυο απόδειξης, αν κανονικοποιηθεί διαδοχικά, καταλήγει στην κανονική μορφή του, η οποία στερείται συνδέσεων τομής. Επειδή ικανοποιείται η ιδιότητα συμβολής, όπως αναφέραμε πρωτύτερα, η κανονική μορφή καθενός δικτύου απόδειξης είναι μοναδική.

Η αξία των δικτύων αποδείξεων

Τα δίκτυα απόδειξης κρίνονται εξαιρετικά σημαντικά για τρεις κυρίως λόγους:

- Θέτουν οριστικό τέλος στην πλασματική αμφισημία, πρόβλημα που ταλανίζει μέχρι και τώρα τις κατηγοριακές γραμματικές.
- Με τη βοήθεια της αντιστοιχίας Curry-Howard παράγονται δίκτυα απόδειξης με τύπους επισημασμένους με όρους του λ-λογισμού.
- Το νόημα ταυτίζεται με την κανονική μορφή αναπαράστασης, η οποία είναι μοναδική. Αυτό σημαίνει ότι προτάσεις με διαφορετική διατύπωση, οι οποίες έχουν το ίδιο νόημα, θα πρέπει να έχουν το ίδιο δίκτυο απόδειξης.

Πρέπει να τονίσουμε ότι αν μία πρόταση του **L** δέχεται παραπάνω από μία σημασιολογικές αναπαραστάσεις, τότε θα παράγει αντίστοιχο αριθμό δικτύων απόδειξης. Αυτό σημαίνει ότι τα δίκτυα αποδείξεων μας δίνουν την ευχέρεια με κριτήρια της αποδεικτικής θεωρίας και όχι υποκειμενικά να ξεχωρίζουμε διαφορετικά νοήματα, τα οποία ενδέχεται να παράγονται από πανομοιότυπες προτάσεις. Βλέπουμε, λοιπόν, ότι τα δίκτυα αποδείξεων ισχυροποιούν τη διεπαφή σύνταξης-σημασιολογίας δίνοντάς μας ένα ευεργετικότατο εργαλειο.

Τέλος, οφείλουμε να μνημονεύσουμε ένα εξαιρετικά χρήσιμο εργαλείο για τη συντακτική ανάλυση των προτάσεων των φυσικών γλωσσών, το *Grail*, το οποίο έχει αναπτυχθεί από το Μόοτ [61]. Το Grail είναι μια εφαρμογή ανοικτού λογισμικού[18] και αποτελεί ένα συντακτικό αναλυτή. Τα δεδομένα που εισάγονται είναι οι κανόνες παραγωγής (γραμματικών **AB**, **NL** ή πολυτροπικών κατηγοριακών γραμματικών) και οι προτάσεις. Έπειτα, η εφαρμογή αναλύει συντακτικά τις προτάσεις παράγοντας τα αντίστοιχα δίκτυα αποδείξεων.

[18]Το Grail τρέχει σε Λίνουξ και βρίσκεται στην προσωπική ιστοσελίδα του Μόοτ όπου διατίθεται δωρεάν, στην ηλεκτρονική διεύθυνση www.labri.fr/perso/moot.

Κεφάλαιο 4

Κατηγοριακές γραμματικές στην ελληνική γλώσσα

Η **ελληνική γλώσσα**[1] δεν είχε την τύχη να εξετασθεί από τη σκοπιά της κατηγοριακής λογικής, παρότι ο Καραμάνης εξετάζει φαινόμενα της ελληνικής [49], όπως αυτό της ανακατάταξης και της σύνδεσης προτάσεων, μετερχόμενος τη συνδυαστική κατηγοριακή γραμματική και, πιο συγκεκριμένα, τη συνδυαστική κατηγοριακή γραμματική διατεταγμένου συνόλου [48]. Αυτό το υποστηρίζουμε, επειδή η συνδυαστική κατηγοριακή γραμματική [83] διαφοροποιείται σημαντικά από τις άλλες κατηγοριακές γραμματικές, καθώς, ενώ και αυτή ξεκινά από τις κλασικές γραμματικές, βασικές αναφορές της είναι η συνθεσιακή σημασιολογία και η επέκταση των ασυμφραστικών γραμματικών. Επιπλέον, χρησιμοποιείται ελαφρώς διαφορετικός συμβολισμός,[2] ο οποίος μπορεί να προκαλέσει συγχύσεις. Τέλος, η συνδυαστική κατηγοριακή γραμματική είναι ένα πεδίο που αναφέρεται σχεδόν αποκλειστικά στη γλωσσολογία, χωρίς να ερευνάται το μέρος της αποδεικτικής θεωρίας, δηλαδή το καθαρά μαθηματικό μέρος.

Συνεπώς, μπορούμε ασφαλώς να υποθέσουμε ότι δεν έχει επιχειρηθεί μια πραγμάτευση της ελληνικής γλώσσας υπό το μαθηματικό πρίσμα των (μη συνδυαστικών) κατηγοριακών γραμματικών.

Είναι προφανές πως η παρούσα εργασία και πολύ περισσότερο το εν λόγω κεφάλαιο δε θα μπορούσε να θεωρηθεί επ'ουδενί μια ολοκληρωμένη πρόταση της εφαρμογής των κατηγοριακών γραμματικών στην ελληνική. Αυτό που θα επιχειρηθεί είναι μία σκιαγράφηση του τρόπου με τον οποίο θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν οι κατηγοριακές γραμματικές και ο ιδιαίτερος μαθηματικός φορμαλισμός τους σε κάποια τμήματα της ελληνικής σταχυολογώντας διάφορα παραδείγματα από τον πλούτο της γλώσσας.

Όπως και στα προηγούμενα κεφάλαια, θα εξετάσουμε προτάσεις αποφαντικές, δηλαδή προτάσεις στις οποίες είτε εκφράζεται κάποια γνώμη, κρίση ή διατυπώνεται μια ανακοίνωση: *οι μαθηματικοί αποδεικνύουν θεωρήματα*. Δε θα ασχοληθούμε με προτάσεις προστακτικές, όπως η πρόταση *δώσε μου το τετράδιο*, επιφωνηματικές, όπως η πρόταση *τι όμορφη παραλία*, ή ερωτηματικές: *τί είναι τα μαθηματικά;*

[1] Στην παρούσα εργασία, όταν αναφερόμαστε στην ελληνική γλώσσα θα εννοούμε τη νέα ελληνική και όχι την αρχαιοελληνική. Στην ξένη βιβλιογραφία, η ορολογία διαφέρει, καθώς ο όρος *ελληνικά* (greek) αντιστοιχεί στην αρχαιοελληνική γλώσσα, ενώ για τη νέα ελληνική γλώσσα χρησιμοποιείται ο όρος *νέα ελληνικά* (modern greek).

[2] Παραδείγματος χάρη, ένας τύπος της μορφής $np\backslash s$, όπως αυτός του αμετάβατου ρήματος, γράφεται ως $s\backslash np$.

Παρακαλείται η επιείκεια του αναγνώστη, καθώς το παρόν κεφάλαιο διέπεται από ένα αμιγώς ερασιτεχνικό γλωσσολογικό ενδιαφέρον και, ως εκ τούτου, είναι πολύ πιθανό να υπάρχουν αβλεψίες γλωσσολογικής φύσης.

Σημείωση Οδηγός μας στην περιδιάβαση της ελληνικής γλώσσας θα είναι η *Γραμματική Νέας Ελληνικής Γλώσσας* των Σωφρόνη Χατζησαββίδη και Αθανασίας Χατζησαββίδου, του Οργανισμού Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων [1]. Επίσης, για να έχουμε μια εικόνα του συντακτικού ρόλου που παίζουν οι λέξεις που πραγματευόμαστε, θα συμβουλευόμαστε το ηλεκτρονικό Σώμα Ελληνικών Κειμένων,[3] και τα στατιστικά εργαλεία που παρέχει, όπως τα διγράμματα, όπου εισάγουμε κάποια λέξη και η εφαρμογή επιστρέφει τις λέξεις που έπονται αυτής με σειρά πιθανότητας εμφάνισης. Έτσι, θα έχουμε κάποιο σημείο αναφοράς για τους διάφορους τύπους μιας λέξης και πώς αυτοί μπορούν να ταξινομηθούν.

4.1 Η ιδιαιτερότητα της ελληνικής γλώσσας

Στις κατηγοριακές γραμματικές, όπως αναφέραμε και στο δεύτερο κεφάλαιο, το λεξικό της γλώσσας υπό μελέτη κατέχει κεντρική θέση. Με την έννοια λεξικό δεν εννοούμε μόνο τις λέξεις που εμφανίζονται σε ένα πλήρες λεξικό, αλλά και τους γλωσσικούς τύπους κάθε λέξης. Εάν θεωρήσουμε ένα μέρος του λόγου, όπως το ουσιαστικό, αυτό δεν περιορίζεται σε ένα μόνο γλωσσικό τύπο, αυτόν που εμφανίζεται στο λεξικό, αλλά οχτώ το μέγιστο: όσες είναι οι πτώσεις της λέξης (ονομαστική, γενική, αιτιατική και κλητική) και οι αριθμοί της (ενικός και πληθυντικός). Το λεξικό επεκτείνεται ακόμα περισσότερο, αν σκεφτούμε ότι για ένα σύνηθες ρήμα όπως το ρήμα *χτίζω* δημιουργούνται είκοσι οκτώ γλωσσικοί τύποι: εάν το κλίνουμε σε όλες τις εγκλίσεις και σε όλους τους χρόνους.

Το παραπάνω οφείλεται στο ότι η ελληνική γλώσσα είναι **κλιτική**. Αντίστοιχα, το ίδιο συμβαίνει και για άλλες γλώσσες όπως η ρωσική ή η τουρκική.[4] Για να το καταλάβουμε αυτό, μπορούμε να δούμε μια γλώσσα που δε μοιράζεται αυτό το χαρακτηριστικό, όπως η αγγλική. Στα αγγλικά, η λέξη *take* μπορεί να σημαίνει είτε *λαμβάνω* είτε *λήψη*. Το συγκεκριμένο πρόβλημα είναι γνωστό ως **πρόβλημα ονόματος-ρήματος** (noun-verb problem). Τα πράγματα μπορούν να χειροτερέψουν εάν σκεφτούμε λέξεις όπως η λέξη *cut*, όπου συνωστίζονται τρεις έννοιες: *κόβω*, *κοπή* και *κομμένος*.

Αυτό που μας αφορά δεν είναι τόσο οι διαφορετικές έννοιες που μπορεί να έχει μία συγκεκριμένη λέξη, δηλαδή η λεξική αμφισημία, αλλά οι συντακτικές της ιδιότητες.[5] Κάτι τέτοιο είναι συνηθισμένο σε όλες τις γλώσσες και φυσικά στην ελληνική. Μια λέξη όπως το *άτομο* μπορεί να αναφέρεται είτε σε κάποιο πρόσωπο είτε στο *ελάχιστο μη διαιρετό στοιχείο με συνηθισμένες μεθόδους τμήμα της ύλης ενός στοιχείου* [6]. Παραμένει όμως, σε αμφότερες τις περιπτώσεις, το ίδιο μέρος του λόγου: ουσιαστικό.

Εάν δούμε, όμως, μία λέξη της αγγλικής, όπως τη λέξη *fine*, η οποία σημαίνει *επιβάλλω πρόστιμο* (ρήμα), *πρόστιμο* (ουσιαστικό), *περίφημα* (επίρρημα) και *καλός* (επίθετο), τότε μπορούμε να καταλάβουμε πώς περιπλέκονται τα πράγματα, αφού αν θέλαμε να αποδώσουμε έναν κατηγοριακό τύπο θα είχαμε την εξής πολλαπλή αντιστοιχία:

- fine$\rightarrow np\backslash s/np$, εάν θεωρηθεί ρήμα

[3] Επιστημονικός υπεύθυνος του Σώματος Ελληνικών Κειμένων είναι ο Διονύσης Γούτσος [4] ενώ η ηλεκτρονική του μορφή έχει σχεδιαστεί και υλοποιηθεί από τον Κώστα Περήφανο.

[4] Οι δύο γλώσσες αποτελούν χαρακτηριστικά παραδείγματα. Στη ρωσική υπάρχουν έξι πτώσεις: η ονομαστική, η γενική, η δοτική, η αιτιατική, η οργανική και η προθετική. Στην τουρκική επίσης έξι: αντί για οργανική και προθετική, υπάρχει η αφαιρετική και η τοπική, οι οποίες διαφέρουν εννοιολογικά από αυτές της ρωσικής.

[5] Σε σημασιολογικό επίπεδο, βέβαια, μας αφορά και η λεξική αμφισημία, για να είμαστε σε θέση να κατανοούμε σωστά τις προτάσεις που αναλύουμε.

- fine→ n, εάν θεωρηθεί ουσιαστικό
- fine→ $s\backslash s$, εάν θεωρηθεί επίρρημα
- fine→ np/n, εάν θεωρηθεί επίθετο.

Έχοντας παρόμοιες ιδέες, ο Λάμπεκ [51] παρουσιάζει τη φράση *time flies* που μπορεί να έχει διαφορετικές παραγωγές, ανάλογα με τους τύπους που θα αναθέσουμε στις λέξεις, καθώς η λέξη *time* σημαίνει *χρονομετρώ* και *χρόνος* και η λέξη *fly* σημαίνει *ίπταμαι*, *αποστέλλω αεροπορικώς* και *μύγα*.[6]

Το φαινόμενο αυτό είναι αρκετά σπάνιο στην ελληνική. Αν θεωρήσουμε τη λέξη *ηχώ*, αυτή μπορεί να εκληφθεί είτε ως ρήμα είτε ως ουσιαστικό. Αυτό, όμως, πέραν του ότι σπανίζει, συμβαίνει «μόνο μία φορά», καθώς μόλις αρχίσουμε να κλίνουμε μία από τις δύο λέξεις αίρεται αυτή η διένεξη, κάτι που δε συμβαίνει σε μη κλιτικές γλώσσες ή που ακόμα κι αν συμβεί, η διένεξη διατηρείται: η λέξη *fines* μπορεί να σημαίνει *πρόστιμα*, αλλά σημαίνει επίσης *(αυτός) επιβάλλει πρόστιμο*.

Παραδόξως, το ίδιο πρόβλημα με την αγγλική έχει μία παντελώς διαφορετική και «μακρινή» γλώσσα: η κινεζική. Πολλοί κινεζικοί χαρακτήρες αποτελούν ταυτόχρονα πολλά μέρη του λόγου, όπως η λέξη 下 (xià σια),[7] η οποία σημαίνει *κατεβαίνω*, *επόμενος* και *κάτω* ή η λέξη 对 (duì τουέι) που σημαίνει *απαντώ*, *αντίθετος* και *εναντίον* [46].

Εν πάση περιπτώσει, το συγκεκριμένο πρόβλημα είναι υπολογιστικής υφής με την έννοια ότι, εάν δε μεσολαβεί υπολογιστής, οι τύποι ανατίθενται εποπτικά στις λέξεις, ανάλογα με τη δοθείσα πρόταση. Την τακτική αυτή την έχουμε ακολουθήσει καθ'όλον το ρου της εργασίας και το ίδιο θα πράξουμε και ακολούθως. Παρόλα αυτά, είναι από τα πρώτα προβλήματα που εξετάζονται, κυρίως για να καταδειχθεί αυτή η πολλαπλή αντιστοιχία, από την οποία ενδέχεται να προκύψουν παραπάνω από μία παραγωγές για μια μοναδική πρόταση. Παρακάτω, θα εξετάσουμε αυτό το ζήτημα περαιτέρω.

Το πρώτο στοιχείο της ιδιαιτερότητας της ελληνικής είναι, λοιπόν, ότι το λεξικό της μας γλιτώνει, τουλάχιστον σε πρώτη φάση, από το πρόβλημα της αντιστοιχίας διαφορετικών μερών του λόγου σε μία λέξη. Οπότε, αυτή η αφετηρία προαναγγέλλει ένα κάποιο ταίριασμα των κατηγοριακών γραμματικών με την ελληνική γλώσσα.

Ένα άλλο στοιχείο που χαρακτηρίζει τη σύνταξη της ελληνικής είναι η **ανακατάταξη**. Οι λέξεις ή καλύτερα σύνολα λέξεων μπορούν να μετατίθενται μέσα σε μια πρόταση διατηρώντας τη συντακτική συνοχή. Σύνολα λέξεων θεωρούνται λέξεις ή συλλογές λέξεων τις οποίες μπορούμε να αντικαταστήσουμε από άλλες ισοδύναμου συντακτικού ρόλου εντός της πρότασης. Αυτά τα λεκτικά σύνολα θεωρούνται ενιαία και μετακινούνται ως τέτοια. Ονοματίζονται αναλόγως του βασικού γραμματικού στοιχείου που περιέχουν και τους αποδίδουμε τους ακόλουθους τύπους:

- ονοματική φράση: np
- επιρρηματική φράση: s/s ή $s\backslash s$ ή $s\backslash(s/s)$ ή $(s/s)/s$
- προθετική φράση: s/s

Λόγου χάρη, δοθείσης της πρότασης *ο γλύπτης θεραπεύει την τέχνη*, προτάσεις θεωρούνται και οι κάτωθι εκφράσεις:

[6] Σε όλα τα παραπάνω έρχεται να προστεθεί και το γεγονός ότι στην αγγλική είναι συνήθης η πρακτική ένα ουσιαστικό να χρησιμοποιείται ως επίθετο, το οποίο προσομοιάζει στη δική μας γενική πτώση, όπως, ας πούμε, στη φράση *language family* (γλωσσική οικογένεια ή οικογένεια γλωσσών).

[7] Στο σύστημα λατινοποίησης της κινεζικής, ονόματι pinyin, το *x* διαβάζεται ως *σ*. Για τον αναλυτικό πίνακα αντιστοίχισης των φθόγγων της κινεζικής σε pinyin, όπου υπάρχει και μεταγραφή στα ελληνικά, βλέπε [9].

- την τέχνη θεραπεύει ο γλύπτης
- την τέχνη ο γλύπτης θεραπεύει
- θεραπεύει την τέχνη ο γλύπτης
- θεραπεύει ο γλύπτης την τέχνη
- ο γλύπτης την τέχνη θεραπεύει

Όπως είναι φυσικό, το νόημα μπορεί να διαφοροποιείται ελαφρά, αφού η σειρά των λέξεων αποτελεί μία τεχνοτροπία απόδοσης έμφασης σε κάποια από αυτές. Παρόλα αυτά, συντακτικώς, οι προτάσεις παραμένουν τέτοιες.

Βέβαια, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η συντακτική συνοχή μετά την ανακατάταξη διατηρείται και σε άλλες γλώσσες, όπως, λόγου χάρη, στα γαλλικά, όπου απουσιάζουν οι πτώσεις από τις λέξεις, τουλάχιστον μορφολογικά. Παραδείγματος χάρη, η πρόταση *le soleil éclaire la terre*, δηλαδή *ο ήλιος φωτίζει τη γη*, ανήκει στη γαλλική, καθώς και η πρόταση *la terre éclaire le soleil*, δηλαδή *η γη φωτίζει τον ήλιο*. Η σημασιολογία τους, όμως, είναι εντελώς διαφορετική. Αυτό μπορεί να μη μας αφορά άμεσα, αλλά η επιδίωξη του *αυτόματου νοήματος* μας υποχρεώνει να θεωρούμε διαφορετικές τις δύο προτάσεις. Αυτό το πρόβλημα δεν υφίσταται στα ελληνικά χάρη ακριβώς στις πτώσεις τον ονομάτων.

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι τη συντακτική συνοχή την καθορίζει κατά πολύ οι διάφορες κλίσεις και πτώσεις της ελληνικής, αφού, παραδείγματος χάρη, τα ονόματα στην ονομαστική επέχουν θέση υποκειμένου, ενώ στην αιτιατική επέχουν θέση αντικειμένου.

Θα μπορούσε κάποιος κάλλιστα να πει, όπως κι εμείς δείξαμε στο δεύτερο κεφάλαιο, ότι ένα αρκετά καλό πρότυπο για την ελληνική θα ήταν ο **LP** ή, προτιμότερα, ο **NLP**, αφού η προσεταιριστικότητα δημιουργεί προβλήματα στις προτάσεις που περιέχουν συνδέσμους. Το πρόβλημα είναι πως αν χρησιμοποιήσουμε τη μετάθεση του **NLP**, καταλήγουμε στο να αποδίδουμε γραμματικότητα σε μη προτάσεις, κάτι που δεν επιθυμούμε να συμβαίνει στη γραμματική μας.

Συνεπώς, η προσθήκη της μετάθεσης στο λογισμό μας, ίσως δημιουργήσει περισσότερα προβλήματα από όσα λύσει. Επιστρέφουμε, λοιπόν, στην απλούστερη κατηγοριακή γραμματική: στον **NL**. Βέβαια, για να επωφεληθούμε των ισχυρών εποπτικών εργαλείων των αποδεικτικών δικτύων, θα βρισκόμαστε εντός του **L**. Για λόγους οικονομίας, όμως, θα αποφύγουμε να χρησιμοποιήσουμε τα θεωρήματα αυτού, καθώς, όπως έχουμε δείξει, δημιουργούνται προβλήματα στη σύνδεση των προτάσεων, γεγονός το οποίο θέλουμε να αποφύγουμε.

4.2 Παραδείγματα στην ελληνική

4.2.1 Αντωνυμίες

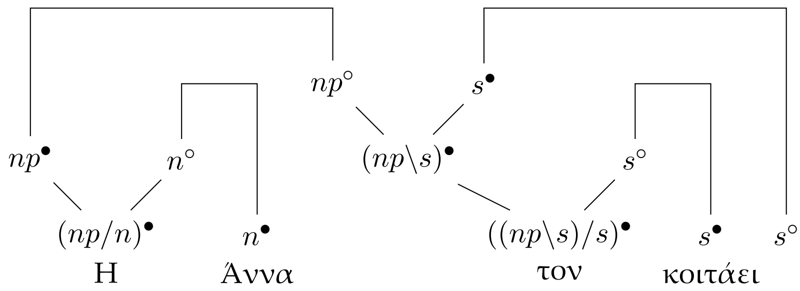
Για την εξέταση κάποιων αντωνυμιών, θα ασχοληθούμε για μια ακόμα φορά με τις πτώσεις της ελληνικής. Ξεκινούμε από την εργασία του Καπελέτι [29], όπου εξετάζεται η ιταλική γλώσσα και, πιο συγκεκριμένα, το φαινόμενο της **αριστερής αποτοποθέτησης κλιτικού**, όπου προτείνονται λύσεις εφαρμόζοντας τον **NL** για φαινόμενα που απαντώνται και στην ελληνική. Παρόλο που δε διακρίνονται οι πτώσεις στην ιταλική, αυτές υπάρχουν και καθορίζουν τη σύνταξή της. Για να καταλάβουμε την ισχύ των πτώσεων της ελληνικής, ας δούμε κάποιες αντωνυμίες και πώς αυτές εμφανίζονται.

Η λέξη *τον*, αρχικά, βλέπουμε ότι αποτελεί άρθρο και συμβολευόμενοι το σώμα κειμένων που αναφέραμε είναι ο συνηθέστερός του ρόλος, οπότε θα της αναθέταμε τον τύπο

np/n. Λόγω του ότι βρίσκεται στην αιτιατική, θα μπορούσαμε να της αναθέσουμε κάποιον ειδικό τύπο όπως np/n_{cau}, έτσι ώστε να μπορούμε να χειριστούμε πιο εύκολα μια πιθανή παραγωγή. Η λέξη, όμως, αυτή αποτελεί επίσης και προσωπική αντωνυμία του γ' προσώπου ενικού. Έστω η πρόταση *η Άννα τον κοιτάει*. Αν αποδώσουμε στη λέξη *τον* τον τύπο $(np\backslash s)/s$, τότε έχουμε

$$np/n, n, (np\backslash s)/s, s \vdash s$$

και το δίκτυο απόδειξης

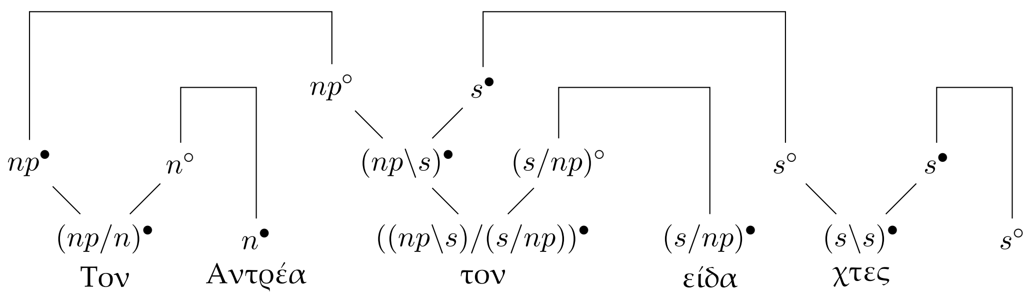


Η αριστερή αποτοποθέτηση κλιτικού, όπως την ορίζει ο Καπελέτι, είναι *η παρουσία ενός συστατικού το οποίο έχει τοποθετηθεί στην αρχή της πρότασης και μιας κλιτικής αντωνυμίας, η οποία έχει συσχετιστεί με αυτό*. Αυτό, παραδείγματος χάρη, συμβαίνει στην πρόταση *τον Αντρέα τον είδα χτες*.

Πάλι, όπως και πριν, το δεύτερο *τον* λογίζεται ως αντωνυμία με συναρτητικό τύπο $(np\backslash s)/(s/np)$, διότι η λέξη απαιτεί ένα μεταβατικό ρήμα από τα δεξιά και, στη συνέχεια, μία ονοματική πρόταση από τα αριστερά, δηλαδή το κλιτικό, έτσι ώστε να παραχθεί μία πρόταση. Οπότε έχουμε την παραγωγή

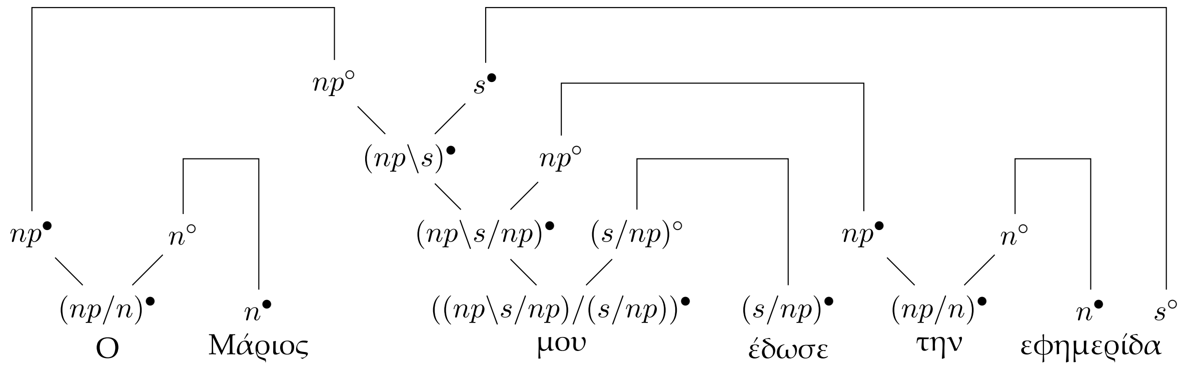
$$np/n, n, (np\backslash s)/(s/np), s/np, s\backslash s \vdash s$$

και το δίκτυο απόδειξης



Παρατήρηση Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι ανακύπτει πρόβλημα στην παραγωγή της πρότασης *τον κοιτώ*, αφού στη λέξη *τον* πρέπει να αποδοθεί ο τύπος $s/(s/np)$, έτσι ώστε να συμπεράνουμε ότι s. Αυτό που πρέπει να έχουμε κατά νου είναι πως ο συναρτητικός τύπος της αντωνυμίας καταδεικνύει την έντονη εξάρτησή της από τις υπόλοιπες λέξεις. Και εδώ, όμως, το υπολογιστικό ζήτημα παραμένει, αφού έχουμε ήδη τρεις τύπους για ένα συγκεκριμένο ρόλο μίας λέξης συν του ότι αυτή μπορεί να επέχει θέση άρθρου.

Αντιστοίχως, μεταχειριζόμαστε και τη γενική πτώση, όπως στη λέξη *μου*, στην πρόταση *ο Μάριος μου έδωσε την εφημερίδα*. Στην προσωπική αντωνυμία *μου* δίνουμε τον τύπο $((np\backslash s)/np)/(s/np)$, αφού στα δεξιά της αντωνυμίας απαιτείται ένα μεταβατικό ρήμα και, έπειτα, χρειάζεται τόσο μία ονοματική φράση από τα αριστερά, όπως και μία από τα δεξιά. Επομένως, λαμβάνουμε το ακόλουθο δίκτυο απόδειξης:



και επιβεβαιώνουμε, έτσι, την ορθότητα της απόδοσης του τύπου στη συγκεκριμένη λέξη.

Παρατήρηση Στην τελευταία πρόταση, μπορούμε να δούμε ότι αν κατά λάθος προχωρήσουμε στον κανόνα της εφαρμογής μεταξύ της λέξης *έδωσε* και της λέξεις *την*, δηλαδή

$$\dfrac{\dfrac{\text{έδωσε}}{s/np} \qquad \dfrac{\dfrac{\text{την}}{np/n} \quad \dfrac{\text{εφημερίδα}}{n}}{np}}{s}$$

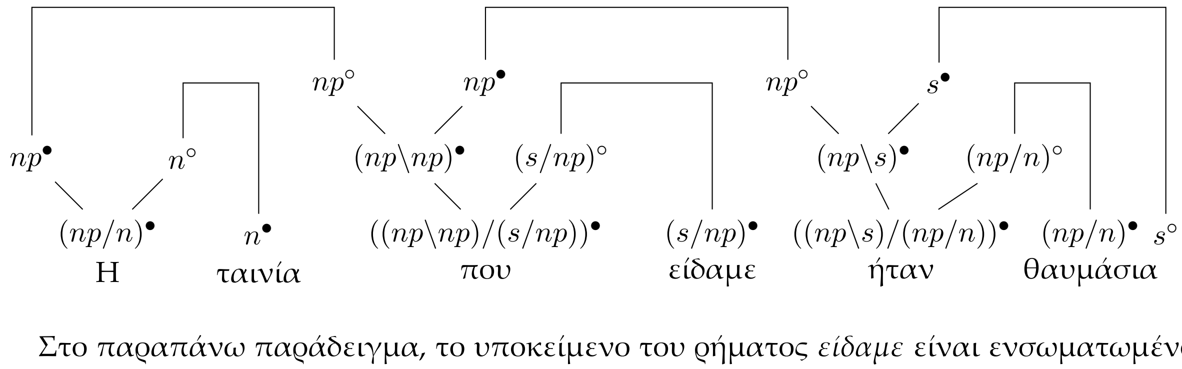
δεν μπορούμε να έχουμε έναν τελικό ακολουθητή συμπεράσματος s, δηλαδή την παραγωγή μίας πρότασης.

Μια άλλη αντωνυμία, η οποία έχει εξεταστεί κατά κόρον από τη σκοπιά των κατηγοριακών γραμματικών [64][23], είναι η αναφορική αντωνυμία *που*. Ο λόγος, κυρίως, της πληθώρας των μελετών πάνω σε αυτήν είναι το ότι εγκλείει προτάσεις μέσα σε άλλες προτάσεις κι αυτή η διεργασία μπορεί δυνητικά να επαναλαμβάνεται επ'άπειρο, όπως στην πρόταση *το πρόγραμμα που τρέχει ο υπολογιστής που έχει η βιβλιοθήκη που σχεδίασε ο αρχιτέκτονας κατέρρευσε*. Ο τύπος που μπορούμε να αναθέσουμε στη λέξη *που* είναι $(np\backslash np)/(s/np)$, αφού από τα δεξιά απαιτεί ένα μεταβατικό ρήμα και, στη συνέχεια, απαιτεί μία ονοματική φράση, έτσι ώστε να αποδώσει μία ονοματική φράση.

Παράδειγμα 4.2.1. Έστω η πρόταση *η ταινία που είδαμε ήταν θαυμάσια*. Έχουμε την παραγωγή

$$np/n, n, (np\backslash np)/(s/np), s/np, (np\backslash s)/(np/n), np/n \vdash s$$

και το δίκτυο απόδειξης



Στο παραπάνω παράδειγμα, το υποκείμενο του ρήματος *είδαμε* είναι ενσωματωμένο στο ρήμα και δεν υπάρχει πρόβλημα. Εάν, τώρα, έχουμε ένα υποκείμενο, όπως στην πρόταση *ο άνθρωπος που κοίταζε ο Άλκης έφυγε*, θα πρέπει να αναθέσουμε στην αναφορική αντωνυμία τον τύπο $((np\backslash np)/np)/(s/np)$, έτσι ώστε, μετά την αποδοχή του μεταβατικού ρήματος από τα δεξιά, να πρέπει να δεχτεί και μία ονοματική φράση από την ίδια μεριά. Βέβαια, βλέπουμε ότι η ίδια παραγωγή θα μπορούσε να ευσταθήσει και στην πρόταση *ο άνθρωπος που κοίταζε τον Άλκη έφυγε*, αλλά το νόημα είναι εντελώς διαφορετικό και οφείλουμε, για λόγους ακριβείας, να θεωρήσουμε διάφορες τις δύο προτάσεις.

Αυτό που παρατηρούμε είναι ότι το υποκείμενο του ρήματος, όταν έχει προηγηθεί αναφορική αντωνυμία, μπαίνει μετά το ρήμα, δηλαδή ανακατατάσσεται.[8] Όπως έχει δείξει η Φιλιππάκη-Warburton [10][11], τα ελληνικά είναι μία γλώσσα, στην οποία τα συντακτικά μέρη έχουν τη σειρά Ρήμα-Υποκείμενο-Αντικείμενο, γεγονός το οποίο επιβεβαιώνεται από την έρευνα της Λασκαράτου [2] σε σώματα κειμένων.

Η φύση αυτή της γλώσσας μάς απαλλάσσει από προβλήματα που απαντώνται κατά το πλείστον στην αγγλική και στη γαλλική με τις αναφορικές αντωνυμίες, όπου επιβάλλεται το υποκείμενο να προηγείται του ρήματος, καθώς αυτές οι γλώσσες είναι του τύπου Υποκείμενο-Ρήμα-Αντικείμενο. Οι μεταφράσεις σε αγγλικά και γαλλικά της πολύπλοκης πρότασης που αναφέραμε στην προηγούμενη σελίδα θα έχουν ως ακολούθως:

(1) The program that the computer that the library that the architect designed has runs crashed.

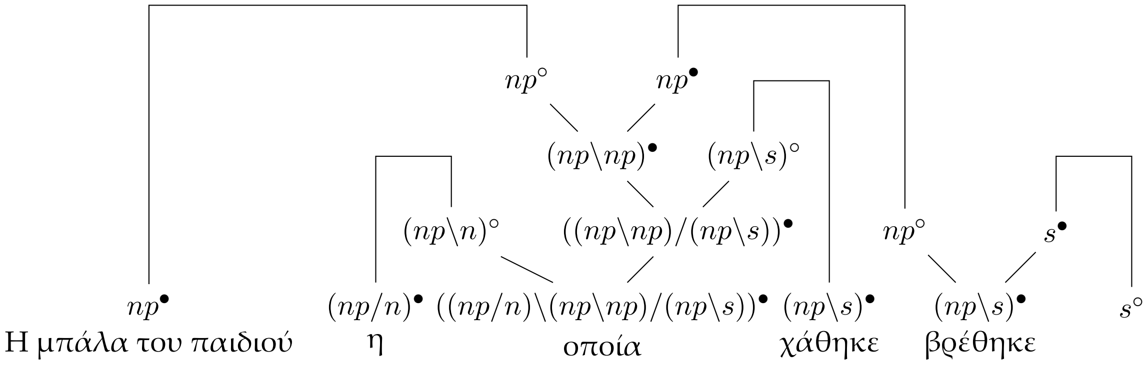
(2) Le programme que l'ordinateur que la bibliothèque que l'architecte dessina a exécute se planta.

Τέτοια φαινόμενα εξετάζονται διεξοδικά με τη βοήθεια των δικτύων αποδείξεων από τον Μόριλ σχετικά με την αγγλική [65], αλλά και σχετικά με τη μητρική του γλώσσα, την ολλανδική [67].

Ένα άλλο εξαιρετικό βοήθημα, το οποίο προκύπτει πάλι από την κλιτικότητα της γλώσσας, είναι ότι μπορούμε να *αναλύσουμε* την αναφορική αντωνυμία *που* με τη λέξη *οποίος*. Επιπλέον, είναι γνωστό πως η αντωνυμία *που* αποφεύγεται χάριν σαφήνειας για να μη δημιουργούνται πολλαπλές αναγνώσεις, όπως στην πρόταση *η μπάλα του παιδιού που χάθηκε βρέθηκε*. Αν επιλέξουμε *να χάσουμε την μπάλα*, θα έχουμε *η μπάλα του παιδιού, η οποία χάθηκε, βρέθηκε*. Αναθέτουμε τον τύπο $(np/n)\backslash(np\backslash np)/(np\backslash s)$ στη λέξη *οποία*, αφού χρειάζεται από τα δεξιά ένα ρήμα, στη συνέχεια από τα αριστερά ένα άρθρο και, τέλος, μία ονοματική φράση από τα αριστερά ώστε να παραχθεί μια ονοματική φράση. Επίσης, να σημειώσουμε ότι, εδώ, η λέξη *του* πρέπει να έχει τύπο $(np\backslash np)/n$, έτσι ώστε να καταδειχθεί η κτητική αντωνυμία. Οπότε έχουμε

$$\underbrace{np/n, n, (np\backslash np)/n, n}_{np}, np/n, (np/n)\backslash(np\backslash np)/s, (np\backslash s), np\backslash s \vdash s$$

και αν λάβουμε τη συντομευμένη παραγωγή που προκύπτει από το παραπάνω άγκιστρο έχουμε το δίκτυο απόδειξης



[8]Αυτή, άλλωστε, είναι και η αφορμή της χρήσης των συνδυαστικών κατηγοριακών γραμματικών από τη μεριά του Καραμάνη, λόγω της οιονεί μετάθεσης που προσφέρουν.

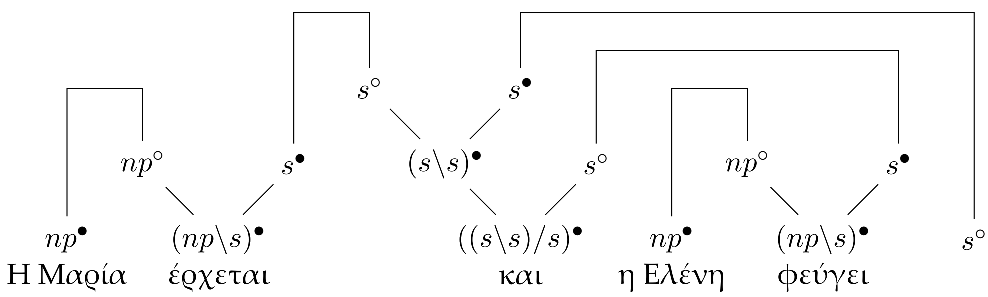
Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι οι αντωνυμίες παίζουν κεντρικό ρόλο στη συντακτική ανάλυση της πρότασης, αφού αυτές συνδέουν καθοριστικά τις λέξεις, έτσι ώστε να προκύψει μία ορθή γραμματική έκφραση. Τα φαινόμενα της σύνδεσης των προτάσεων έχουν απασχολήσει κατά πολύ τους κατηγοριακούς λογικούς, καθώς εκεί φαίνεται αν το εργαλείο που χρησιμοποιούμε ανταποκρίνεται στην ιδιοσυγκρασία της γλώσσας και είναι σε θέση να μας παράσχει το επιδιωκόμενο: την ορθή συντακτική ανάλυση.

4.2.2 Σύνδεσμοι και επιρρήματα

Στους συνδέσμους, όπως στο συνηθέστατο σύνδεσμο *και*, ήδη ο Λάμπεκ [51] είχε αποδώσει τον τύπο $(s\backslash s)/s$. Αυτή η επιλογή είναι εύλογη, διότι ο ρόλος του συνδέσμου είναι η σύνδεση δύο προτάσεων, μία από τα αριστερά και μία από τα δεξιά, έτσι ώστε να δημιουργηθεί μία νέα πρόταση. Παραδείγματος χάρη, έστω η πρόταση *η Μαρία έρχεται και η Ελένη φεύγει*. Η παραγωγή της είναι

$$np/n, n, np\backslash s, (s\backslash s)/s, np/n, n, np\backslash s \vdash s$$

και το δίκτυο απόδειξης



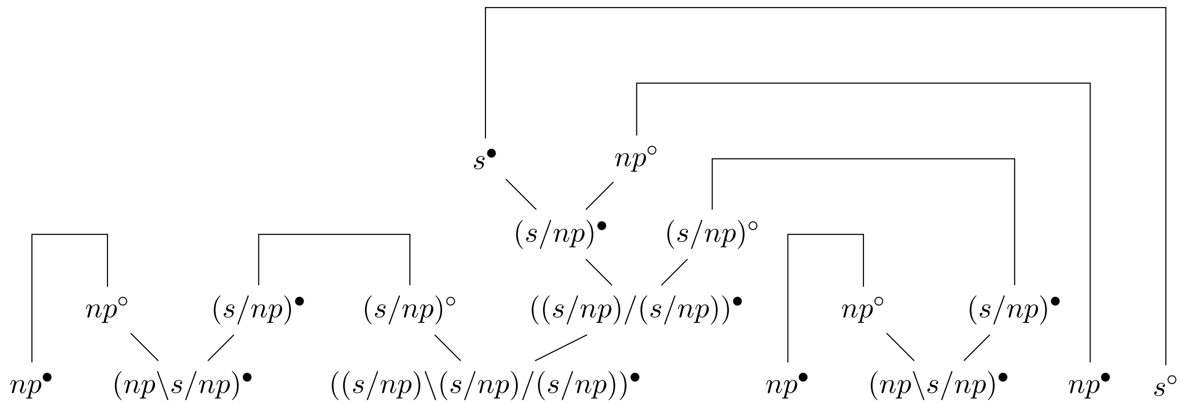
Στη γλώσσα, όμως, δεν είναι σπάνιο να έχουμε **μη συστατική παρατακτική σύνδεση**, όπως στην πρόταση *η μητέρα μαγειρεύει και τα παιδιά τρώνε το φαγητό*. Εδώ, ο σύνδεσμος και συνδέει δύο μη συστατικά μέρη. Του δίνουμε τον τύπο $(s/np)\backslash((s/np)/(s/np))$ που δε διαφέρει πολύ από τον προηγούμενο που είπαμε, οπότε έχουμε

Η μητέρα	μαγειρεύει	και	τα παιδιά	τρώνε	το φαγητό
np	$np\backslash(s/np)$	$(s/np)\backslash((s/np)/(s/np))$	np	$np\backslash(s/np)$	np

Για την παραγωγή της πρότασης θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της υποθετικής συλλογιστικής, όπως δείξαμε στο δεύτερο κεφάλαιο. Έχουμε

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{np} \quad \overline{np\backslash(s/np)}}{s/np} \quad \dfrac{-1}{np}}{s}}{s/np} \quad \overline{(s/np)\backslash(s/np)/(s/np)}}{(s/np)/(s/np)} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{np} \quad \overline{np\backslash(s/np)}}{s/np} \quad \dfrac{-2}{np}}{s}}{s/np}}{s/np} \quad \overline{np}}{s}$$

Το δίκτυο απόδειξης είναι περισσότερο προφανές και δε χρειάζεται να επιστρατεύσουμε κάποια συγκεκριμένη τεχνική. Έτσι, έχουμε



Με το φαινόμενο της μη συστατικής παρατακτικής σύνδεσης χρησιμοποιώντας τις κατηγοριακές γραμματικές έχουν ασχοληθεί αρκετοί [44][21][60][36], ενώ ο Μόριλ [64] έχει παρουσιάσει το πώς χρησιμοποιούνται τα δίκτυα αποδείξεων στη διασάφηση των παραγωγών, όπως συνέβη με το αμέσως προηγούμενο παράδειγμα.

Αντίστοιχα, αν θεωρήσουμε άλλους συνδέσμους, ανάλογα με τη θέση τους στην πρόταση και το ρόλο που αυτοί παίζουν, λαμβάνουν διαφορετικούς τύπους. Παραδείγματος χάρη, οι αιτιολογικοί σύνδεσμοι (γιατί, επειδή, αφού) είναι τύπου $(s\backslash s)/s$, εφόσον τοποθετούνται μεταξύ δύο προτάσεων για να παραχθεί μία νέα, ενώ οι υποθετικοί (αν, εάν) ή οι χρονικοί (όταν, μόλις) μπορεί να είναι και τύπου $(s/s)/s$, όταν τοποθετούνται στην αρχή της πρώτης, δέχονται ως όρισμα μία πρόταση και, στη συνέχεια, δέχονται κι άλλη μία πρόταση ως όρισμα, όπως, επί παραδείγματι, στην πρόταση *αν φύγεις, θα φύγω* ή στην πρόταση *όταν φύγεις, θα φύγω*.

Οι σύνδεσμοι πολλές φορές εισάγουν μία πρόταση που παίζει το ρόλο του ονόματος, όπως στην πρόταση *μου είπε ότι φεύγει*. Συνεπώς, για να μπορούν να αναλυθούν συντακτικά τέτοιες προτάσεις θα πρέπει να λογίσουμε κάποιους συνδέσμους ως np/s. Η παραπάνω πρόταση, τότε, θα έχει την παραγωγή

$$(s/np)/(s/np), s/np, np/s, s \vdash s.$$

Τα επιρρήματα, τώρα, είναι συνήθως τύπου s/s ή $s\backslash s$, ανάλογα αν προηγούνται ή έπονται μιας πρότασης. Ένα κλασικό παράδειγμα τέτοιου επιρρήματος είναι το χρονικό επίρρημα *χτες*. Στην πρόταση *χτες, είδαμε μια ταινία* έχει τύπο s/s, ενώ στην πρόταση *είδαμε μια ταινία χτες* έχει τύπο $s\backslash s$. Πολλά επιρρήματα έχουν τέτοια συμπεριφορά. Ένα περαιτέρω στοιχείο που θα πρέπει να συνυπολογίσουμε είναι, για μια ακόμα φορά, η ανακατάταξη των όρων που επιτρέπει σε μεγάλο βαθμό η ελληνική.

Τα επιρρήματα είμαστε σε θέση να τα τοποθετούμε οπουδήποτε σε μια φράση δεδομένου ότι δε διαταράσσουμε την ενότητα άλλων λεκτικών συνόλων. Αυτό σημαίνει ότι οι αποδεκτές ανακατατάξεις των λεκτικών συνόλων της πρότασης *ο Γιώργος τρέχει γρήγορα* δε συμπεριλαμβάνουν την έκφραση *ο γρήγορα Γιώργος τρέχει*. Και εδώ, το πρόβλημα μπορεί να λυθεί αν χρησιμοποιήσουμε θεωρήματα του **LP**, όπως αυτό της ανταλλαγής, και θα έχουμε ότι $s\backslash s \vdash s/s$. Έτσι, θα μπορέσουμε να αναλύσουμε συντακτικά την πρόταση.

Γνωρίζουμε ότι οι επιρρηματικές φράσεις επέχουν θέση επιρρήματος, οπότε θα πρέπει να αποδώσουμε τέτοιους τύπους σε συγκεκριμένες λέξεις, ώστε να ανταποκρίνονται σε αυτήν τη νοηματοδότηση. Επί παραδείγματι, στην πρόθεση *σε* αποδίδουμε τον τύπο $(s\backslash s)/np$, αφού για να υπάρξει η πρόταση πρέπει να έπεται της πρόθεσης μία ονοματική φράση και, ύστερα, να δημιουργείται ένα επίρρημα. Αυτός ο τύπος ευσταθεί στην πρόταση *έρχομαι σε μια ώρα*, αν θεωρήσουμε ότι τα αριθμητικά είναι τύπου np/n, αφού προηγούνται των ουσιαστικών.[9]

Είναι συνηθισμένο φαινόμενο στην ελληνική, το φωνήεν της πρόθεσης *σε* να απαλείφεται και να προκύπτουν οι λέξεις *στον*, *στην* και ούτω καθ'εξής. Συνήθως, η απόδοση των τύπων γίνεται ξεκινώντας από τα ελάχιστα φωνήματα που έχουν νόημα και έχει ως εξής, αν θεωρήσουμε ως παράδειγμα την πρόταση *κοιμάται στο δωμάτιο*:

κοιμάται	σ-	το	δωμάτιο
s	$(s\backslash s)/np$	np/n	n

Μπορούμε όμως να θεωρήσουμε ενιαία τη λέξη, όπως απαντάται στο κείμενο, οπότε μπορεί να τις αποδοθεί ο τύπος $(s\backslash s)/n$. Παρά ταύτα, ο τύπος $(s\backslash s)/np$ μπορεί να είναι ακόμα δόκιμος, αν σκεφτούμε προτάσεις όπως την εξής: *κοιμάται στο τρίτο δωμάτιο*.

Παρατήρηση Όπως αναφέραμε στο τρίτο κεφάλαιο, μπορούμε να εισαγάγουμε το βασικό τύπο pp για την προθετική φράση. Ίσως κάτι τέτοιο να είναι απαραίτητο, καθώς υπάρχουν ρήματα που υποχρεωτικά λαμβάνουν εμπρόθετο αντικείμενο, όπως το ρήμα *πηγαίνω* ή το ρήμα *έρχομαι*.

4.3 Το ζήτημα της πολλαπλής αντιστοιχίας λέξεων-τύπων

Καθ'όλη την εργασία, και ιδίως σε αυτό το κεφάλαιο, όπως προείπαμε, οι τύποι ανατίθενται στις λέξεις έτσι ώστε να παράγονται γραμματικές εκφράσεις. Δηλαδή, δοθέντος ενός επισημειωμένου κειμένου[10] και δοθέντων κάποιων κανόνων συντακτικής ανάλυσης, εν προκειμένω των κανόνων συμπερασμού της κατηγοριακής λογικής, τύποι αντιστοιχούνται σε λέξεις και, εν συνεχεία, αναλύουμε το κείμενο συντακτικά. Αυτή η διεργασία, όμως, όταν απαιτήσουμε να γίνει μαζικά και αυτοματοποιημένα, δηλαδή με τη βοήθεια κάποιου υπολογιστή, μιλάμε για την **εκμάθηση** των κατηγοριακών γραμματικών.

Σχετικά με το θέμα της εκμάθησης των κατηγοριακών γραμματικών έχουν γίνει έρευνες, όπως αυτή του Florêncio [35], και αυτή της Σαντιγιόν-Ρεζέ [78] με γλώσσα υπό μελέτη τη γαλλική,[11] από όπου μπορούμε να δούμε ένα τμήμα του λεξικού (πίνακας 4.1) που περιέχει τους τύπους που αποδίδονται στις λέξεις *a*, δηλαδή *(αυτός) έχει*, *et*, δηλαδή *και*, *était*, δηλαδή *(αυτός) ήταν* και *le*, δηλαδή το αρσενικό άρθρο *ο*.

Μία άλλη μελέτη είναι αυτή του Μόοτ, η οποία βασίζεται στο *Σώμα Κειμένων της Προφορικής Ολλανδικής*.[12] Στον πίνακα 4.2 μπορούμε να δούμε κάποιες λέξεις, τον αριθμό των τύπων που αποδίδονται σε αυτές και το συχνότερο τύπο.

Συνεπώς, αν θέλουμε να φανταστούμε μία παρόμοια απόπειρα καταγραφής των τύπων των λέξεων της ελληνικής, κατά πάσα βεβαιότητα, θα καταλήξουμε σε τέτοιες βάσεις δεδομένων. Αυτές, παρά τον όγκο τους, μπορούν να μας εξυπηρετήσουν κατά πολύ στο συντακτικό μας έργο και, σε δεύτερη φάση, στο μεταφραστικό έργο, ιδίως αν αυτό είναι αυτοματοποιημένο.

---

[9] Μπορούμε να δούμε από το δίγραμμα για τη λέξη *σε* ότι η πιθανότερη λέξη που ακολουθεί είναι η λέξη *μια*, γι'αυτόν το λόγο αναφέρουμε το συγκεκριμένο παράδειγμα. Τα αριθμητικά μπορεί να είναι και τύπου $np/(np/n)$, ώστε να αναλύεται συντακτικά και η πρόταση *τρία μικρά παιδιά ξεκουράζονταν*.

[10] **επισημειωμένο κείμενο**: κείμενο του οποίου οι λέξεις έχουν επισημανθεί με τη γραμματική τους ιδιότητα.

[11] Το σώμα κειμένων που χρησιμοποιείται παρουσιάζεται στο [12].

[12] Μια παρουσίαση του εν λόγω σώματος βρίσκεται στο [68].

et 32:

$((n\backslash n)\backslash(n\backslash n))/(n\backslash n)$	7
$((n\backslash np)\backslash(n\backslash np)/(n\backslash np)$	1
$((np/n)\backslash(np/n))/(np/n)$	1
$((s\backslash s)\backslash(s\backslash s)/(s\backslash s)$	1
$(n\backslash n)/np$	7
$(n\backslash np)/np$	3
$(np\backslash np)/n$	1
$(np\backslash np)/np$	2
$(s/s)/(np\backslash s)$	1
$(s\backslash s)/s$	8

a 61:

$((np\backslash s)/(np\backslash s))/(np\backslash s)$	16
$((np\backslash s)/np)/(np\backslash s)$	10
$((np\backslash s)/pp)/(np\backslash s)$	4
$((s/(np\backslash s)/(np\backslash s))/np$	1
$np\backslash((np\backslash s)/pp)/(np\backslash s)$	1
$(np\backslash s)/(np\backslash s)$	17
$(np\backslash s)/np$	8
$(s/s)/np$	4

le 144:

$(((np\backslash s)/np)\backslash((np\backslash s)/np))/n$	1
$(((np\backslash s)/pp)\backslash((np\backslash s)/pp))/n$	1
$((np\backslash s)\backslash(np\backslash s))/n$	1
$(np\backslash s)/((np\backslash s)/np)$	4
$(pp\backslash(np\backslash s))/((pp\backslash(np\backslash s))/np)$	1
$(s/s)/n$	2
$(s\backslash s)/((s\backslash s)/np)$	1
$(s\backslash s)/n$	6
np/n	126
$s/(s/np)$	1

était 11:

$((np\backslash s)/np)/(np\backslash s)$	1
$((np\backslash s)/pp)/(np\backslash s)$	1
$((np\backslash s)\backslash s)/np$	1
$(np\backslash s)/(n\backslash n)$	2
$(np\backslash s)/(np\backslash s)$	1
$(np\backslash s)/np$	3
$np\backslash((np\backslash s)/pp)$	1
$(np\backslash s)$	1

Πίνακας 4.1: Τμήμα λεξικού γαλλικής βάσει του σώματος κειμένου *Paris VII Corpus*. Δίπλα από κάθε λέξη εμφανίζεται το πλήθος των εμφανίσεων όλων των τύπων που αποδίδονται στη λέξη και δίπλα από κάθε τύπο το πλήθος των εμφανίσεων του συγκεκριμένου τύπου. Επειδή πρόκειται για τμήμα λεξικού, κάποια από τα μερικά αθροίσματα δε συμπίπτουν.

Λέξη	Μετάφραση	Αρ. Τύπων	Συχνότερος τύπος
is	είναι	313	$(np\backslash s)/np$
zit	κάθομαι/κάθεσαι/κάθεται	62	$np\backslash s$
vind	βρίσκω	82	$((np\backslash s)/(np/np))/np$
kan	μπορώ/μπορεί	93	$((np\backslash s)/(np\backslash s)$

Πίνακας 4.2: Τμήμα του συγκεντρωτικού πίνακα των συνηθέστερων μορφών ρημάτων του Σώματος Κειμένων της Προφορικής Ολλανδικής.

Επίλογος

Όσο προχωράμε στην περιγραφή της γλώσσας χρησιμοποιώντας το τυπικό μας σύστημα, προβαίνουμε στον εμπλουτισμό του λεξικού μας από τύπους. Είναι λογικό πως δεν μπορούν πάντα να αντιμετωπιστούν όλες οι εκφράσεις,[13] καθώς οι πιθανότητες συνδυασμού λέξεων με τελείως απροσδόκητο τρόπο δε μηδενίζονται ποτέ. Δεν έχουμε παρά να σκεφτούμε την ποίηση και άλλες μορφές του λόγου που είθισται να συντάσσονται αντισυμβατικά ως προς την καθιερωμένη χρήση της γλώσσας.

Όπως παρατηρήσαμε, φαινομενικά ισχυρότερα μοντέλα λογικής, όπως αυτό του **LP**, είναι επιρρεπή σε ανεπιθύμητες συντακτικές αναλύσεις, γι'αυτό οφείλουμε να ελέγχουμε την «εργαλειοθήκη» μας. Αυτό που επιχειρούμε, σε αδρές πάντα γραμμές, είναι η παραγωγή ενός εργαλείου που να ανταποκρίνεται στο εγχείρημά μας, στην περιγραφή της συντακτικής διεργασίας με όσο το δυνατόν μεγαλύτερη διαπίστευση. Μία συνολική αντιμετώπιση της ελληνικής βάσει των κατηγοριακών γραμματικών είναι κάτι το ευκταίο και ξεφεύγει, όπως είπαμε, από το στόχο της παρούσας εργασίας.

Μια τέτοια αντιμετώπιση όμως, σε συνδυασμό με το υπόλοιπο εξελισσόμενο έργο που αφορά τη συντακτική και σημασιολογική αναπαράσταση διαφόρων φυσικών γλωσσών με όρους των κατηγοριακών γραμματικών, θα μπορούσε να συμβάλει σημαντικά στην **αυτόματη μετάφραση**, η οποία είναι ακόμα σχετικά προβληματική. Από παιδαγωγική σκοπιά, τώρα, αυτή η συνολική αντιμετώπιση θα μπορούσε να προσφέρει το **στέρεο μαθηματικό υπόβαθρο** που θα δικαιολογούσε ακόμα περισσότερο την αυστηρότητα της συντακτικής ανάλυσης, την οποία απαιτεί ένας δάσκαλος από κάποιον στον οποίο διδάσκει την ελληνική γλώσσα.

Όπως και να έχει, σκοπός μας ήταν να καταδειχθεί η ευδοκίμηση των κατηγοριακών γραμματικών στην ελληνική και η δυνατότητα μιας πληρέστερης περιγραφής της συγκεκριμένης γλώσσας κατ'αυτόν τον τρόπο.

[13] Αν και, προφανώς, αυτό επιδιώκουμε πάντα, την αντιμετώπιση κάθε δυνατής έκφρασης.

Βιβλιογραφία

[1] Χατζησαββίδης, Σωφρόνης and Αθανασία Χατζησαββίδου (2008), *Γραμματική Νέας Ελληνικής Γλώσσας*. Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων.

[2] Λασκαράτου, Χρυσούλα (1989), "A functional approach to constituent order with particular reference to modern greek." *Παρουσία*.

[3] Στεφανέας, Πέτρος (1996), "Λογικά Συστήματα και Κατηγορίες." *Μαθηματική Επιθεώρηση*, 45. Περιοδική Επιστημονική Έκδοση.

[4] Γούτσος, Δ. (2002), "Σώμα Ελληνικών Κειμένων: Σχεδιασμός και υλοποίηση." Πρακτικά του 6ου Διεθνούς Συνεδρίου Ελληνικής Γλωσσολογίας, Πανεπιστήμιο Κρήτης.

[5] Κολέτσος, Γιώργος (2008), *Εισαγωγή στη Μαθηματική Λογική*. Εκδόσεις Εκκρεμές.

[6] Έργο, Συλλογικό (2009), *Λεξικό της κοινής νεοελληνικής*. Ινστιτούτο Νεοελληνικών Σπουδών. Ίδρυμα Μανόλη Τριανταφυλλίδη.

[7] Πλούταρχος (1ος αι. μ.Χ.), *Πλατωνικά Ζητήματα. Γυναικών Αρεταί.* Εκδόσεις Ζήτρος. μτγ. Κωνσταντίνα Μόσχου (2002).

[8] Αριστοτέλης (4ος αι. π.Χ.), *Περί ερμηνείας*. Εκδόσεις Σμίλη. μτγ. Αλέξανδρος Κεσίσογλου, Γεώργιος Παπατσίμπας.

[9] Κομφούκιος (551–479 π.Χ.), *Η μεγάλη μάθηση. Το μέσον ως οικεία αρμονία*, Παράρτημα - Συστήματα αλφαβητικής γραφής των κινεζικών φθόγγων. Εκδόσεις Ίνδικτος. μτφ. Σωτήρης Χαλικιάς (2010).

[10] Φιλιππάκη-Warburton, Ειρήνη (1982), "Προβλήματα σχετικά με τη σειρά των όρων στις ελληνικές προτάσεις." *Γλωσσολογία 1*.

[11] Φιλιππάκη-Warburton, Ειρήνη (1985), "Η σημασία της σειράς Ρήμα Υποκείμενο Αντικείμενο στα Νέα Ελληνικά." In *Μελέτες για την Ελληνική Γλώσσα. Πρακτικά της 3ης Ετήσιας Συνάντησης του Τομέα Γλωσσολογίας της Φιλοσοφικής Σχολής του Αριστοτέλειου Πανεπιστήμιου Θεσσαλονίκης*, 135–158, Τομέας Γλωσσολογίας της Φιλοσοφικής Σχολής του Αριστοτέλειου Πανεπιστήμιου Θεσσαλονίκης, ΑΠΘ: Υπηρεσία Δημοσιευμάτων, Θεσσαλονίκη.

[12] Abeillé, Anne, Lionel Clément, and François Toussenel (2003), "Building a Treebank for French." In *Treebanks : Building and Using Parsed Corpora*, 165–188, Springer.

[13] Abrusci, V. Michele (1990), "Non-commutative intuitionistic linear logic." *Mathematical Logic Quarterly*, 36, 297–318.

[14] Abrusci, V. Michele (1991), "Phase semantics and sequent calculus for pure noncommutative classical linear propositional logic." *J. Symb. Log.*, 56, 1403–1451.

[15] Ajdukiewicz, K. (1935), "Die syntaktische konnexität." *Stud. Philos.*, 1, 1–27.

[16] Ajdukiewicz, K. and P. T. Geach (1967), "On syntactical coherence." *The Review of Metaphysics*, 20, 635–647.

[17] Areces, Carlos and Raffaella Bernardi (2004), "Analyzing the core of categorial grammar." *Journal of Logic, Language and Information (JoLLI)*, 13, 121–137.

[18] Awodey, S. (2006), *Category Theory*. Oxford Logic Guides, Clarendon Press.

[19] Bar-Hillel, Yehoshua (1953), "A quasi-arithmetical notation for syntactic description." *Language*, 29, 47–58. Reprinted in Y. Bar-Hillel. (1964). *Language and Information: Selected Essays on their Theory and Application*, Addison-Wesley 1964, 61–74.

[20] Bar-Hillel, Yehoshua, Chaim Gaifman, and Eli Shamir (1963), "On categorial and phrase-structure grammars." *Bulletin of the research council of Israel*, F, 1–16.

[21] Barry, Guy and Martin Pickering (1990), "Dependency and constituency in categorial grammar." Technical report, University of Edinburgh.

[22] Bechet, Denis and Philippe de Groote (1996), "Constructing different phonological bracketings from a proof-net." Projet Calligramme. INRIA-Lorraine, CRIN, CNRS.

[23] Bernardi, Raffaella (2002), "Reasoning with polarity in categorial type logic." Technical report, Universiteit Utrecht – NL. Universit'a 'G. D'Annunzio' – Chieti, Italy.

[24] Bierman, G.M. (1995), "What is a categorical model of intuitionistic linear logic?" Technical report, University of Cambridge Computer Laboratory.

[25] Blanc, A.O.V.L. (1991), *Lesniewski's Computative Protothetic*. Ph.D. thesis, University of Manchester.

[26] Bolshakov, I.A. and A. Gelbukh (2004), *Computational Linguistics: Models, Resources, Applications*. Ciencia de la computación, Instituto Politécnico Nacional.

[27] Bundgaard, Peer F. (2010), *Handbook of Phenomenology and Cognitive Sciences*, Husserl and Language. Springer Netherlands.

[28] Buszkowski, Wojcßch (1985), "The equivalence of unidirectional lambek categorial grammars and context-free grammars." *Mathematical Logic Quarterly*, 31, 369–384.

[29] Capelleti, Matteo (2007), *The Non-Associative Lambek Calculus: Logic, Linguistic and Computational Properties*. Ph.D. thesis, Universita degli Studi di Bologna.

[30] Casadio, Claudia (2001), "Non-commutative linear logic in linguistics." *Grammars*, 4, 167–185.

[31] Chomsky, N. (1956), "Three models for the description of language." *Information Theory, IRE Transactions on*, 2, 113–124, URL `http://dx.doi.org/10.1109/TIT.1956.1056813`.

[32] Chomsky, N. (1963), "Formal properties of grammars." In *Handbook of Mathematical Psychology* (R.D. Luce, R. Robert Bush, and Eugene Galanter, eds.), 323–418, John Wiley and Sons, New York.

[33] Chomsky, Noam (1957), *Συντακτικές δομές*. Εκδόσεις Νεφέλη. εισαγωγή Ειρήνη Φιλιππάκη-Warburton, επιμέλεια Φώτης Α. Καβουκόπουλος. 1997.

[34] Cohen, J.M. (1967), "The equivalence of two concepts of categorial grammar." *Information and Control*, 10, 475–484.

[35] Costa Florêncio, Christophe (2003), *Learning Categorial Grammars*. Ph.D. thesis, UiL OTS.

[36] Francez, Nissim (1997), "Hypothetical-reasoning and radical non-constituent coordination in categorial logic."

[37] Frege, Gottlob (1891), *Funktion Und Begriff*. Hermann Pohle. μτφ. στα αγγλικά: Function and Concept από το βιβλίο The Frege Reader. Edited by Michael Beaney.

[38] Geach, P. T. (1987), "A program for syntax." In *The Formal Complexity of Natural Language* (W. J. Savitch, E. Bach, W. Marsh, and G. Safran-Naveh, eds.), 117–131, Reidel, Dordrecht.

[39] Gentzen, Gerhard (1935), "Untersuchungen über das logische Schließen II." *Mathematische Zeitschrift*, 39.

[40] Girard, Jean-Yves (1987), "Linear logic." *Theor. Comput. Sci.*, 50, 1–102.

[41] Girard, Jean-Yves (1995), "Logic: its syntax and semantics." In *Advances in Linear Logic*, 1–42, Cambridge University Press.

[42] Girard, Jean-Yves, Paul Taylor, and Yves Lafont (1989), *Proofs and types*. Cambridge University Press, New York, NY, USA.

[43] Godel, Robert (1957), *Les sources manuscrites de linguistique generale de Ferdinand de Saussure*. E. Droz, Gene̍ve.

[44] Houtman, J. (1994), *Coordination and constituency: a study in categorial grammar*. Groningen dissertations in linguistics, Rijksuniversiteit Groningen.

[45] Husserl, Edmund (1913), *Logische Untersuchungen*. Max Niemeyer, Halle (Germany).

[46] Jingrong, Wu and Cheng Zhenqiu (2007), *New age chinese-english dictionary*. The Commercial Press.

[47] Kandulski, Maciej (1988), "The equivalence of nonassociative lambek categorial grammars and context-free grammars." *Mathematical Logic Quarterly*, 34, 41–52.

[48] Karamanis, Nikiforos (2000), "Ordered set combinatory categorial grammar." Technical report, Division of Informatics, Institute for Communicating and Collaborative Systems, University of Edinburgh.

[49] Karamanis, Nikiforos (2002), "A categorial grammar for greek."

[50] Lamarche, François and Christian Retoré (1996), "Proof nets for the lambek calculus — an overview." In *Proceedings of the Third Roma Workshop "Proofs and Linguistic Categories"*, 241–262.

[51] Lambek, Joachim (1958), "The mathematics of sentence structure." *American Mathematical Monthly*, 65, 154–170.

[52] Lambek, Joachim (1961), "On the calculus of syntactic types." In *Structure of Language and its Mathematical Aspects* (R. Jacobsen, ed.), Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, XII, American Mathematical Society.

[53] Lane, S.M. (1998), *Categories for the Working Mathematician*. Graduate Texts in Mathematics, Springer.

[54] Leśniewski, S. (1929), "Grundzüge eines neuen systems der grundlagen der mathematik." *Fund. Math. XIV*.

[55] Montague, Richard (1973), "The Proper Treatment of Quantification in Ordinary English." In *Approaches to Natural Language: proceedings of the 1970 Stanford workshop on Grammar and Semantics* (J. Hintikka, J. Moravcsik, and P. Suppes, eds.), 221–242, Reidel, Dordrecht.

[56] Moortgat, Michael (1995), "Multimodal Linguistic Inference." *Logic Jnl IGPL*, 3, 371–401.

[57] Moortgat, Michael (1997), "Categorial Type Logics." In *Handbook of Logic and Language* (Johan van Benthem and Alice ter Meulen, eds.), 93–177, North Holland, Amsterdam.

[58] Moortgat, Michael (2009), "Symmetric Categorial Grammar." *Journal of Philosophical Logic*, 38, 681–710.

[59] Moortgat, Michael and Richard Moot (2011), "Proof nets for the lambek-grishin calculus." *CoRR*, abs/1112.6384.

[60] Moortgat, Michael and Glyn Morrill (1991), "Heads and phrases. type calculus for dependency and constituent structure." In *Journal of Language, Logic and Information*.

[61] Moot, Richard (1999), "Grail: an interactive parser for categorial grammars." In *Proceedings of VEXTAL'99, University Cá Foscari*, 255–261.

[62] Moot, Richard (2002), *Proof Nets for Linguistic Analysis*. Ph.D. thesis, University of Utrecht.

[63] Moot, Richard and Quintijn Puite (2001), "Proof nets for the multimodal lambek calculus." Technical report, in W. Buszkowski and M. Moortgat (eds), Studia Logica, Kluwer. Special Issue.

[64] Morrill, G. (2010), *Categorial Grammar: Logical Syntax, Semantics, and Processing*. Oxford linguistics, Oxford University Press.

[65] Morrill, Glyn (2000), "Incremental processing and acceptability." *Computational Linguistics*, 26, 319–338.

[66] Morrill, Glyn (2007), "A chronicle of type logical grammar: 1935–1994." *Research on Language and Computation*, 5, 359–386.

[67] Morrill, Glyn, Oriol Valentín, and Mario Fadda (2007), "Grammar and incremental processing of dutch word order."

[68] Oostdijk, Nelleke (1999), "Building a corpus of spoken dutch."

[69] Pentus, M. (1993), "Lambek grammars are context free." In *Proceedings of the 8th Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science*, 429–433, IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, California.

[70] Pierce, Benjamin C. (1991), *Basic Category Theory for Computer Scientists*. MIT Press.

[71] Prawitz, D. (2006), *Natural Deduction: A Proof-Theoretical Study*. Dover Books on Mathematics, Dover Publications.

[72] Retoré, Christian (2003), "Handsome proof-nets: perfect matchings and cographs." *Theor. Comput. Sci.*, 294, 473–488, URL `http://dx.doi.org/10.1016/S0304-3975(01)00175-X`.

[73] Rétoré, C. (2002), "Logique linéaire et syntaxe des langues." Habilitation à diriger des recherches.

[74] Retoré, Christian (1996), "Calcul de Lambek et Logique Linéaire." *TAL*, 37, 39–70.

[75] Retoré, Christian (2005), "The Logic of Categorial Grammars: Lecture Notes." Technical Report RR-5703, INRIA, URL `http://hal.inria.fr/inria-00070313`.

[76] Roorda, Dick (1991), *Resource logics: proof-theoretical investigations*. D. Roorda.

[77] Russell, Bertrand (1908), "Mathematical Logic as Based on the Theory of Types." *American Journal of Mathematics*, 30, 222–262.

[78] Sandillon-Rezer, Noémie-Fleur (2010), "Learning categorial grammar with tree transducers." LaBRI, CNRS, INRIA.

[79] Sequoiah-Grayson, Sebastian (2010), "Epistemic closure and commutative, nonassociative residuated structures." *Synthese*, 1–16.

[80] Shieber, Stuart M. (1985), "Evidence against the context-freeness of natural language." *Linguistics and Philosophy*, 8, 333–343, URL `http://dx.doi.org/10.1007/BF00630917`.

[81] Sipser, Michael (2007), *Εισαγωγή στη θεωρία υπολογισμού*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης. μτφ. Χρήστος Καπούτσος.

[82] Sørensen, Morten Heine B. and Pawel Urzyczyn (1998), "Lectures on the curry-howard isomorphism."

[83] Steedman, Mark and Jason Baldridge (2009), "Combinatory categorial grammar." In *Non-Transformational Syntax: A Guide to Current Models* (Robert Boyer and Kirsti Börjars, eds.), Blackwell.

[84] Tiede, H.J. (1999), *Deductive Systems and Grammars: Proofs as Grammatical Structures*. Indiana University.

[85] Troelstra, A.S. (1992), *Lectures on Linear Logic*. CSLI Lecture Notes, Center for the Study of Language and Information.

[86] Van Benthem, Johan (1991), "Language in action." *Journal of Philosophical Logic*, 20, 225–263.

[87] Van Oosten, Jaap (1995), "Basic category theory." Technical report, BRICS.

[88] Watkinson, Stephen and Suresh Manandhar (1999), "Unsupervised lexical learning with categorial grammars using the lll corpus." In *In Inductive Logic Programming (ILP) Workshop on Logic Language and Learning (LLL)*, Bled, Slovenia.

[89] Yetter, David N. (1990), "Quantales and (noncommutative) linear logic." *The Journal of Symbolic Logic*, 55, pp. 41–64, URL `http://www.jstor.org/stable/2274953`.

Παράρτημα

Αντιστοιχία Ελληνικών-Αγγλικών Όρων

ακολουθητής sequent

αναδόμηση restructuring

ανακατάταξη scrambling

ανταλλαγή exchange

ανταλλαγή με εναλλαγή transposition exchange

ανταλλοίωτος contravariant

αντιμεταθετικός commutative

αντιτονία antitonicity

αξιωματικοποίηση axiomatizability

αποδεικτικό σύστημα proof system

αριστερή αποτοποθέτηση κλιτικού clitic left dislocation

αρχή δυϊκότητας duality principle

αρχικό αντικείμενο initial object

ασυμφραστικός context-free

αυτόματο νόημα automated meaning

γενικό στοιχείο global element

γιατί όχι why not

γραμματική εξάρτησης dependency grammar

γραμματική φραστικής δομής phrase-structure grammar

γραμματικότητα grammaticality

γραμμική συνεπαγωγή linear implication

δίκτυο απόδειξης proof net

δείκτης index

διαισθητικός intuitive, intuitionistic

διαλλαγή switching

διατεταγμένο σύνολο orderedset

διμελής binary

δομή απόδειξης proof structure

εγκλειστικός συναρτητής inclusion functor

εισροή input

εκθετικό exponential

εκμάθηση learning

εκροή output

ελαφρώς συμφραστικός mildly context-sensitive

ενδοσυναρτητής endofunctor

εξασθένιση weakening

εξισωτής equalizer

εξώθηση pushout

επιλήσμων συναρτητής forgetful functor

επιμορφισμός epimorphism, epic morphism, epi

επιπεδικό planar

επισημειωμένο κείμενο annotated text

εφέλκυση pullback

εφαρμογή application

ζεύξη binding

ηγούμενος όρος antecedent

ισοτονία isotonicity

καθολικός universal

κανόνας απαλοιφής elimination rule

κανόνας εισαγωγής introduction rule

κανόνας της τομής cut rule

κατηγοριακός categorial

κατηγορικός categorical

κορυφή top

κυκλική ανταλλαγή cyclic exchange

λεξικισμός lexicalism

λεξικοποιημένος lexicalized

λογική συνειδητή ως προς τους πόρους της resource-sensitive logic

μέχρις ισομορφισμού up to morphism

μερικά διατεταγμένο σύνολο poset

μετάθεση permutation

μετάθεση postposing

μεταάρνηση postnegation

μονάδα unit

μοναδοειδές monad

μονοειδές monoid

μονομελής unary

μονομορφισμός monomorphism, monic morphism, mono

μονοπλευρικός one-sided

μονοτονία monotonicity

μπάρα turnstile

ομαδοειδές groupoid

παρά par

παράγωγος derivative

παραγωγή derivation

παραμέληση dereliction

παρεμβαλλόμενο βέλος mediating arrow

πεδίο ορισμού domain

πλασματική αμφισημία spurious ambiguity

πολλαπλασιαστικός multiplicative

πολυσύνολο multiset

προάρνηση retronegation

προβιβασμός promotion

προκείμενη assumption

προσθετικός additive

πρωτογενής τύπος primitive type

πρόθεση preposing

πυθμένας bottom

πόρος resource

σημασιολογία semantics

σημασιολογικός semantic

συγγινόμενο coproduct

συγκαθολική κατασκευή couniversal construction

συγκώνος cocone

συζυγής adjoint

συμβολοσειρά string

συμμονάδα counit

συμμοναδοειδές comonad

συμπεδίο ορισμού codomain

συμφραστικός context-sensitive

συνάρτηση εκτίμησης evaluation function

συναρτητής functor

συναρτητής ομομορφισμού hom-functor

συναρχικό coinitial

συνδυαστική κατηγοριακή γραμματική combinatory categorial grammar

συνεξισωτής coequalizer

συνεφαρμογή co-application

συνθεσιακή σημασιολογία compositional semantics

συνιστώσα component

συντακτική ανάλυση ως συμπερασμός parsing as deduction

συντακτική συνοχή syntactical coherence

συντακτικός λογισμός syntactic calculus

συνόριο colimit

συστατικό constituent

συστατικότητα constituency

συστολή contraction

σύζευξη adjunction (κεφ. 1)

σύζευξη conjunction (κεφ. 2)

σύνδεση link

σύνδεση προτάσεων coordination

σύνδεσμος connective

σύστημα συμπερασμού deductive system

τάξη arity

τελικό terminal

τυπολογικός type-logical

τύπος type

υποδομική λογική substructural logic

υποθετική συλλογιστική hypothetical reasoning

υπολειμματικότητα residuation

υπόθεση hypothesis

φυσικά of course

φυσικός μετασχηματισμός natural transformation

φυσικός συμπερασμός natural deduction

φόρμουλα formula

ύψωση lifting

Ευρετήριο